Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Priv.Doz. Dr. Jochen Denzler

Übungen zur Variationsrechnung — Blatt 1

Sommersemester 2000

Ausgabe am Mi 3.5.2000
Besprechung Aufg. 2 übermorgen, Rest ab Fr 10.5.2000

1. **Das Brachystochronenproblem** lautet: Unter allen ebenen Kurven $(x, y(x))$, $x \in [0, x_0]$, die von $(0,0)$ nach (x_0, y_0) laufen, finde man diejenige / eine solche, für die ein Massenpunkt, der unter Einfluß der Gravitation reibungsfrei gleitet, aus der Ruhe in $(0,0)$ startend, unter Einfluß der Gravitation den Weg bis (x_0, y_0) am schnellsten zurücklegt.

   Dies ist zunächst eine Physikaufgabe: Begründen Sie, warum die mathematische Formulierung wie folgt lautet:

$$\min\left\{ I[y] := \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{y(x)}}\,dx \;\middle|\; y \in C^0[0,x_0]\,,\ y(0)=0\,,\ y(x_0)=y_0\,,\ I[y] \text{ definiert}\right\}$$

   Wägen Sie ab, welche engere Klasse von zulässigen Funktionen $y(\cdot)$ der vagen Formulierung „$I[y]$ definiert" entsprechen könnte. — Besprechung am Mi 10.5.2000

2. **Kein Minimum – Welche Funktionsklasse**
   Man zeige, daß das Variationsproblem

$$\min\left\{ I[u] := \int_0^1 u(x)^2(1-u(x))^2\,dx \;\middle|\; u \in C^0[0,1]\,,\ u(0)=0\,,\ u(1)=1\right\}$$

   keine Lösung hat. Welchen Wert hat das Infimum? Könnte man die Funktionsklasse C^0 sinnvoll erweitern, damit ein Minimum angenommen wird? Ist die von Ihnen gewählte erweiterte Funktionsklasse dann noch ein Banachraum? — Besprechung am Fr 5.5.2000

3. **Sattelpunkt im Unendlichen**
   Das folgende Beispiel stammt aus *I. Rosenholtz, L. Smylie: "The only Critical Point in Town" Test*, Mathematics Magazine **58**(1985), 149–150.

   Zeigen Sie, daß die Funktion

$$g : (x,y) \mapsto y^2 + 3(y+e^x-1)^2 + 2(y+e^x-1)^3\,,\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

   genau einen kritischen Punkt hat, daß dieser ein relatives Minimum ist, daß die Funktion aber nach unten unbeschränkt ist (also insbesondere das relative Minimum kein absolutes Minimum ist).

   Moral: die einzige Lösung der $u = (x,y)$ Gleichung $Dg(u) = 0$ löst nicht das Problem $\min g$, und das sogar schon im endlichdimensionalen Banachraum $\mathbb{R}^2$. Mit $\exp(g(u))$ statt $g(u)$ gilt dasselbe, obwohl $\exp(g(u))$ nach unten beschränkt ist.

   Können Sie das Bauprinzip des Beispiels beschreiben, insbesondere, warum es mit dem Stichwort „Sattelpunkt im Unendlichen" überschrieben ist? — Besprechung am Mi 10.5.2000

4. **Segeln mit dem Strom, gegen den Wind, möglichst Flußmitte**
Hier sei

$$I[u] := \int_{-1}^{1} \left((1 - u'(x)^2)^2 + u(x)^2\right)\, dx$$

Konstruieren Sie eine Folge von stückweise–C^1–Funktionen u_n mit der Eigenschaft, daß $I[u_n] \to 0$, zeigen Sie aber, daß für alle stückweise–C^1–Funktionen u gilt: $I[u] > 0$.

Das hier beschriebene Problem beschreibt die in der Überschrift beschriebene Situation nur qualitativ. Können Sie das mathematische Dilemma, das einer Suche nach dem Optimum entgegensteht, in Worte fassen, die der in der Überschrift beschriebenen Situation entsprechen? (Literatur zum Segeln gegen den Wind z.B.: Abschnitt Kraftvektorzerlegung im Mechanik–Band des Physiklehrbuches Bergmann–Schäfer) — BESPRECHUNG AM MI 10.5.2000

5. **Johann Bernoullis Lösung des Brachystochronenproblems per ad-hoc-Methode**
Diese Lösung wird im folgenden Zitat aus dem Buch von Stefan Hildebrandt und Anthony Tromba „PANOPTICUM – Mathematische Grundmuster des Vollkommennen“ (Spektrum–Verlag) beschrieben (s. 74f). Führen Sie sie aus. (Es geht hier nur um das Aufstellen der Gleichung; wie man sie löst, das kommt später.)

Wir können uns die Überraschung ausmalen, als sich die wohlbekannte Zykloide als die Brachystochrone herausstellte, die zu finden Johann Bernoulli seinen Bruder herausgefordert hatte.

Im Dezember 1696 wiederholte Johann seine Herausforderung in den Acta Eruditorum und verlangte von sienen Zeitgenossen eine Lösung bis Ostern 1697; gleichzeitig teilte er mit, daß Leibniz ihm schon eine Lösung geschickt hätte. Bis zu dem gesetzten Zeitpunkt lösten fünf Mathematiker das Problem, Johann und Jakob Bernoulli, Newton, Leibniz und L'Hospital. Sehen wir uns an, welche Lösung sich Johann ausgedacht hatte.

Der Hauptgedanke seines Beweises bestand darin, das mechanische Problem der Bewegung eines schweren Massenpunktes in ein Problem der Optik überzuführen. Johann bemerkte nämlich, daß wegen Galileis Fallgesetz der Fall eines Massenpunktes längs einer Brachystochrone genauso vor sich geht wie die Bewegung eines Lichtpartikels in einer Atmosphäre, deren Dichte in bestimmter Weise von der Höhe über dem Boden abhängt. Ferner benutzte Johann ein Resultat, das Pierre de Fermat, Richter in Toulouse und zugleich einer der größten Mathematiker aller Zeiten, gefunden hatte. Fermat hatte erkannt, daß sich das Brechungsgesetz des Lichtes aus einer Annahme ergibt, die man heute als Fermatsches Prinzip bezeichnet: Licht pflanzt sich auf dem schnellsten Wege von einem Punkt zu einem anderen fort. Zu Fermats Zeit wurde das Brechungsgesetz René Descartes zugeschrieben; heute wissen wir, daß es vom Holländer Willebrord Snell (1591-1626) entdeckt worden ist. Es besagt, daß längs einer Fläche, die zwei homogene Medien verschiedener Dichte schneidet, die Sinusse der Brechungswinkel im umgekehrten Verhältnis zu den optischen Dichten stehen, also: $\sin\alpha_1 / \sin\alpha_2 = n_2/n_1$.

Weiterhin ist die Geschwindigkeit eines Lichtteilchens in einem optischen Medium umgekehrt proportional zu dessen Dichte.

Johann zerlegte die Atmosphäre in sehr dünne Schichten konstanter Dichte, benutzte das Brechungsgesetz und führte hierauf einen Grenzübergang aus, bei dem er die Dicke der Schichten gegen Null schrumpfen ließ. Dies führte zu einer Differentialgleichung für die Kurve schnellsten Falls, deren Lösungen Johann als Zykloiden erkannte.
— BESPRECHUNG AM ODER NACH FR 12.5.2000