TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
Priv.Doz. Dr. Jochen Denzler

# Übungen zur Variationsrechnung — Blatt 2

**Sommersemester 2000**

<u>AUSGABE AM FR 5.5.2000</u>
<u>BESPRECHUNG: SCHAU MER MAL, WANNS PASST</u>

**6. Fundamentallemma der Variationsrechnung**
Sei $f \in C^0([t_0,t_1] \to \mathbb{R}^n)$. Falls für alle $\varphi \in C^\infty_{\text{kp}}(]t_0,t_1[ \to \mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle f(t); \varphi(t)\rangle \, dt = 0 \; ,$$

dann ist $f \equiv 0$.
— <u>MACHEN WIR SOFORT AUS DEM STAND HERAUS</u>

**7. Erdmannsche Eckenbedingung**
Sei $L \in C^1(]t_0,t_1[ \times \mathcal{G} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ mit $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $y^*$ stückwiese $C^1$ mit einer (möglichen) Ecke bei $\hat{t} \in ]t_0,t_1[$. Wenn ein solches $y^*$ (schwaches) Minimum des Variationsproblems

$$I[y] := \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), \dot{y}(t)) \, dt \; , \quad y(t_0) = y_0 \; , \; y(t_1) = y_1$$

ist, dann gilt für $t \neq \hat{t}$ die übliche Eulergleichung (warum?). Man zeige, daß in $t = \hat{t}$ die Eckenbedingung $p^*(t-) = p^*(t+)$ gilt, wobei

$$p(t) := L_{\dot{y}}(t, y(t), \dot{y}(t))$$

definiert ist. D.h., selbst wenn $\dot{y}^*$ in $\hat{t}$ einen Sprung haben könnte, so muß dort doch $p^*$ stetig sein. — <u>BESPRECHUNG AB MI 10.5.2000</u>

**8. Das Auftreten von Ecken**
Man beschreibe die Gesamtheit der Lösungen des Variationsproblems

$$\min \left\{ \int_0^3 \dot{y}^2(t)(1-\dot{y}(t))^2 \, dt \;\middle|\; y \text{ stückweise } C^1 \; , \; y(0) = 0 \; , \; y(3) = 1 \right\}$$

prüfe, daß für diese die Erdmannsche Eckenbedingung erfüllt ist, daß aber $y(t) = t/3$ die einzige $C^1$-Lösung (ohne Ecken) der Eulergleichung auf ganz $[0,3]$ mit den gegebenen Randbedingungen ist. — <u>BESPRECHUNG AB MI 10.5.2000</u>

**9. Natürliche Randbedingungen**
Sei $L$ wie in Aufgabe 7 und $y^* \in C^1([t_0,t_1] \to \mathbb{R}^n)$ sei ein (schwaches) Minimum für $I[y] := \int_{t_0}^{t_1} L(t, y, \dot{t}) \, dt$ *ohne* vorgegebene Randbedingungen. Man zeige, daß dann zusätzlich zu den Eulerschen Gleichungen die sog. *natürlichen* Randbedingungen $p^*(t_0) = p^*(t_1) = 0$ erfüllt sind. — <u>BESPRECHUNG AM FR 12.5.2000</u>