Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Priv.Doz. Dr. Jochen Denzler

Übungen zur Variationsrechnung — Blatt 6

Sommersemester 2000

Ausgabe am Mi., 21.6.2000
Besprechung: ab Mi., 28.6.2000

23. Eigenwerte per minimax und maximin

Ausgehend von der induktiven Charakterisierung der Eigenwerte des Sturm–Liouville Operators

$$\begin{aligned}
&I[u] := \int_a^b \big(p(x)u'(x)^2 + q(x)u(x)^2\big)\,dx =: \langle\!\langle u|u\rangle\!\rangle\ ,\\
&K[u] := \int_a^b \sigma(x)u(x)^2\,dx =: \langle u|u\rangle\ ,\\
&0<\nu\le p(x)\,,\quad 0<\underline{\sigma}\le\sigma(x)\,,\quad p\in C^1[a,b]\,,\quad q,\sigma\in C^0[a,b]\ .\\
&V_1 := \mathring{W}^{1,2}[a,b]\ , \qquad \lambda_1 := \min\Big\{I[u]\ \Big|\ u\in V_1\,,\ K[u]=1\Big\} = I[u_1]\\
&\text{und für } n\ge 2:\\
&V_n := \{u\in V_{n-1}\mid \langle u|u_{n-1}\rangle = 0\}\ , \qquad \lambda_n := \min\Big\{I[u]\ \Big|\ u\in V_n\,,\ K[u]=1\Big\} = I[u_n]
\end{aligned}$$

wobei die u_j nicht notwendig eindeutig definiert sein müssen, sondern *eine* Minimumsstelle sind. (In diesem Fall sind sie zwar eindeutig bis auf Vorzeichen, aber das haben wir nicht gezeigt, und in analogen anderen Beispielen gilt es auch nicht.)

Man zeige, daß sich diese Eigenwerte auf einen Schlag ohne Induktion durch jedes der beiden folgenden Variationsprinzipien charakterisieren lassen:

$$\lambda_n = \min\Big\{\max\{I[u]\mid K[u]=1\,,\ u\in E_n\}\ \Big|\ E_n\ n\text{-dimensionaler Unterraum von } \mathring{W}^{1,2}[a,b]\Big\}$$

und

$$\lambda_n = \max\Big\{\min\{I[u]\mid K[u]=1\,,\ u\perp F_n\}\ \Big|\ F_n\ n-1\text{-dimensionaler Unterraum von } \mathring{W}^{1,2}[a,b]\Big\}$$

In der zweiten Formel bedeutet die Notation $u\perp F_n$, daß $\langle u|f\rangle = 0$ für alle $f\in F_n$.
— Besprechung Mi, 28.6.

24. Gebietsmonotonie:

Die Resultate der vorigen Aufgabe gelten auch für den Laplace–Operator mit Dirichlet–Randbedingungen, dh. $I[u] := \int_\Omega |\nabla u|^2$, $K[u] := \int_\Omega u^2$ auf $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ (mit ganz analogem Beweis) und dürfen verwendet werden.

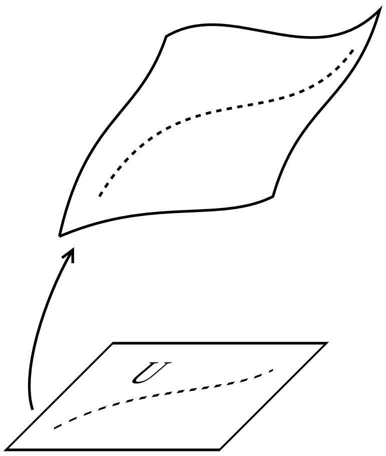
Seien λ_n die Eigenwerte des Laplace–Operators mit Dirichlet–Randbedingungen in einem Gebiet Ω und λ_n' diejenigen in einem Gebiet Ω'. Man zeige, daß aus $\Omega'\subset\Omega$ folgt: $\lambda_n'\ge\lambda_n$ für alle n.
— Besprechung Mi, 28.6.

b.w.

25. Reparametrisierung bei Geodäten

Es sei $u \mapsto G(u)$, $U \to \mathbb{R}^{d\times d}$ eine stetige Funktion, deren Werte symmetrische positiv definite Matrizen sind. Betrachte die Funktionale

$$\ell[u] := \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot u(t)^T G(u(t)) \dot u(t)}\, dt\ , \quad u \in W^{1,1}([t_0,t_1] \to U)$$
$$E[u] := \int_{t_0}^{t_1} \dot u(t)^T G(u(t)) \dot u(t)\, dt\ , \quad u \in W^{1,2}([t_0,t_1] \to U)$$



Im Fall, daß $x : U \to \mathbb{R}^n$ ein Flächenstück im $\mathbb{R}^n$ beschreibt und somit $t \mapsto x(u(t))$ eine Kurve auf dieser Fläche, und basierend auf der Integraldefinition der Länge einer Raumkurve γ als $\int \|\dot\gamma(s)\|\, ds$, welcher Ausdruck ist für G zu wählen, damit $\ell[u]$ die Bogenlänge der Kurve $\gamma = x \circ u$ beschreibt?

Man zeige: Falls $u : [0,1] \to U$ ein Minimum des Funktionals ℓ ist (bzgl. vorgegebener Randbedingungen $u(t_{0/1}) = u_{0/1}$ und $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ ein Diffeomorphismus, dann ist $u \circ \varphi$ auch ein Minimum und $\ell[u] = \ell[u \circ \varphi]$. u ist genau dann ein (absolutes) Minimum von E, wenn es ein Minimum von ℓ ist und zusätzlich nach der Bogenlänge parametrisiert ist, dh. u eingesetzt in den Integranden von E eine konstante Funktion ergibt.

Man zeige: Wenn ℓ (zu gegebenen Randbedingungen) ein Minimum hat, dann gibt es eine Minimalfolge für ℓ, aus der sich *keine* gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen läßt. (Verwende $\ell[u] = \ell[u \circ \varphi]$.)

— <u>Besprechung ab Mi., 28.6.2000</u>

PS: Wir haben nicht gezeigt, aber es gilt, daß schwache $W^{1,1}[t_0,t_1]$–Konvergenz gleichmäßige Konvergenz impliziert. (Buch von Buttazzo-Giaquinta-Hildebrandt, S. 77-80). Während uns also die Funktionalanalysis für $W^{1,p}$ mit $p > 1$ sofort erlaubt, aus einer Minimalfolge für E eine $W^{1,2}$-schwach konvergente Teilfolge auszuwählen, zeigt uns diese Aufgabe, daß die entsprechende Aussage für ℓ nicht gilt.

26. Satz von Egorov:

Zeigen Sie: Falls $f_n \to f$ fü. in einer beschränkten Menge $U \subset \mathbb{R}^d$, dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein Kompaktum $K \subset U$ derart, daß $f_n|_K \to f|_K$ glm.

Hinweis: Für gegebenes δ sei $M_{n_0} := \{t \in U : |f_n(t) - f(t)| \leq \delta\ (\forall n \geq n_0)\}$. Für $\delta = 1/2^k$ finde man ein M_{n_0}, dessen Maß $\mu(M_{n_0}) \geq \mu(U) - \varepsilon/2^k$ ist.

Bemerkung: die Aufgabe steht deshalb hier, weil das Resultat bei direkten Methoden der Variationsrechnung gebraucht wird.

— <u>Besprechung ab Fr, 30.6.</u>