Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Priv.Doz. Dr. Jochen Denzler

Übungen zur Variationsrechnung — Blatt 7

Sommersemester 2000

Ausgabe am Mi., 12.7.2000
Besprechung: am Mi., 19.7.2000

Bisher hatten wir nur eine Theorie für lokal-schwache Minimale (dh. Segmente, von denen hinreichend kurze Stücke schwache Minimale sind): Euler-Glg. und Legendre-Bedingung $L_{\dot y\dot y} \geq 0$ als notwendige Bedingung, und mit verschärfter Legendre-Bedingung $L_{\dot y\dot y} > 0$ hinreichend. Ferner direkte Methoden zum Existenzbeweis für absolute Minima.

Jetzt greifen wir die Frage der feineren Differenzierung auf: schwache und starke Minimale. Da dabei angenommen wird, daß wir schon eine Lösung der Euler–Gleichung haben, von der die Minimalitätsfrage noch zu entscheiden ist, machen wir ausreichende Glattheitsannahmen; diese werden in einer solchen Situation in der Regel gegeben sein.

Generalvoraussetzungen für dieses Blatt (und folgende):

Es sei $L \in C^2([t_-,t_+] \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ mit einem Gebiet $\mathcal{U}$ in $\mathbb{R}^n$. Ferner sei $y_* \in C^1([t_-,t_+] \to \mathcal{U})$ eine Lösung der Eulergleichung $\int^t L_y(\tau, y(\tau), \dot y(\tau))\, d\tau - L_{\dot y}(t, y(t), \dot y(t)) \equiv const.$ In einer Umgebung dieser Lösung gelte die strenge Legendre-Bedingung $L_{\dot y\dot y} > 0$ (positiv definit); dh. es gebe ein ε derart, daß für alle $t \in [t_0, t_1]$ und für alle (z, v) mit $|z - y_*(t)| < \varepsilon$, $|v - \dot y_*(t)| < \varepsilon$ gilt: $L_{\dot y\dot y}(t, z, v) > 0$. (Aus Stetigkeitsgründen ist hierfür hinreichend, daß $L_{\dot y\dot y}(t, y_*(t), \dot y_*(t)) > 0$ für $t \in [t_-, t_+]$.) Wie wir aus der Vorlesung wissen, impliziert das, daß $I : y \mapsto I[y] := \int_{t_-}^{t_+} L(t, y(t), \dot y(t))\, dt$ aus $C^2\Big(C^1([t_-,t_+] \to \mathcal{U}) \to \mathbb{R}\Big)$ ist und daß $y_* \in C^2([t_-,t_+] \to \mathcal{U})$ liegt. Wir betrachten das Variationsproblem I unter festen Randbedingungen $y(t_\pm) = y_\pm \in \mathcal{U}$.

27. Jacobi-Bedingung und schwache Minimale

Wir machen die og. Generalvoraussetzungen und betrachten das akzessorische Variationsproblem

$$J[\varphi] := \frac{d^2}{d\varepsilon^2}\bigg|_{\varepsilon=0} I[y_* + \varepsilon\varphi] =$$
$$= \int_{t_-}^{t_+} \Big(\varphi^T(t) L^*_{yy}(t)\varphi(t) + 2\varphi^T(t) L^*_{y\dot y}(t)\dot\varphi(t) + \dot\varphi^T(t) L^*_{\dot y\dot y}(t)\dot\varphi(t)\Big)\, dt$$

mit $\varphi \in C^1_0([t_-,t_+] \to \mathbb{R}^n)$, wobei $L^*_{yy}(t) := L_{yy}(t, y_*(t), \dot y_*(t))$ usw. sind, im Falle vektorwertiger Funktionen y bzw. φ also Matrizen: $L_{y\dot y} = ((L_{y_i\dot y_j}))_{ij}$.

Man beachte:

$$y_* \text{ schwaches Minimum für } I \Longrightarrow J[\varphi] \geq 0 \ (\forall\varphi)$$
$$J[\varphi] > 0 \ (\forall\varphi \neq 0) \Longrightarrow y_* \text{ schwaches Minimum für } I.$$

Wir verschärfen ferner die Regularitätsannahme zu $L \in C^3$ (wo wird das jeweils verwendet?).

(a) Schreiben Sie die Eulergleichungen des akzessorischen Variationsproblems J auf und zeigen Sie, daß man eine Basis des Lösungsraumes für diese dadurch enthält, daß man die allgemeine Lösung der Euler-Gleichungen für I nach geeigneten Integrationskonstanten (z.B. den Anfangsdaten) differenziert.

(b) Die erwähnten Eulergleichungen des akzessorischen Variationsproblems J heißen *Jacobigleichungen* von I. Geben Sie die Jacobigleichungen für das Catenoid-Problem (siehe Aufgabe 13) $L(x, r, r') = r\sqrt{1 + r'^2}$ bei der Lösung $r_*(x) = E\cosh(x/E)$ an und zeigen Sie, daß $\varphi(x) = \cosh(x/E) - (x/E)\sinh(x/E)$ eine Lösung der Jacobigleichung ist.

(c) Sei ein Punkt $(t_0, y_*(t_0))$ auf einer Extremalen y_* des Variationsproblems I gegeben. Dann heißt $(t_1, y_*(t_1))$ mit $t_1 \neq t_0$ ein dazu konjugierter Punkt, wenn es eine Lösung φ der Jacobigleichung gibt mit $\varphi(t_0) = 0 = \varphi(t_1)$, aber φ nicht identisch 0.

Zeigen Sie: Falls y_* auf $[t_0, t_2]$ schwache Minimale ist, dann gibt es keinen zu $(t_0, y_*(t_0))$ konjugierten Punkt $(t_1, y_*(t_1))$ mit $t_0 < t_1 < t_2$. (Dieses Nichtvorhandensein konjugierter Punkte ist definitionsgemäß die Jacobi–Bedingung.)

Hinweis: $\varphi \equiv 0$ absolutes Minimum von $J[\varphi]$; Erdmannsche Eckenbedingung nebst Eindeutigkeitssatz auf $\hat{\varphi} := (\text{Lsg. der Jacobi-Glg.}) \cdot \chi_{[t_0,t_1]}$ anwenden.

(d) Jetzt sei $n = 1$. Es gebe keinen zu $(t_0, y_*(t_0))$ konjugierten Punkt $(t_1, y_*(t_1))$ im abgeschlossenen Intervall $[t_0, t_2]$. Wir wollen zeigen, daß dann y_* tatsächlich ein schwaches Minimum ist:

Zeigen Sie zuerst: es gibt eine Lösung $\tilde{\varphi}$ der Jacobi-Gleichung, die auf ganz $[t_0, t_2]$ (strikt) positiv ist.

Zeigen Sie ferner: Für den Differentialoperator $\mathbb{J}$ mit $\mathbb{J}(\varphi) := \frac{d}{dt}(A\dot{\varphi} + B\varphi) - (B\dot{\varphi} + C\varphi)$ gilt die Produktformel $\tilde{\varphi}\mathbb{J}(\xi\tilde{\varphi}) = \xi\tilde{\varphi}\,\mathbb{J}(\tilde{\varphi}) + \frac{d}{dt}(A\tilde{\varphi}^2\dot{\xi})$. Folgern Sie durch Identifizierung geeigneter A, B, C, daß für jedes φ gilt: $J[\varphi] = \int_{t_0}^{t_2} L^*_{\dot{y}\dot{y}}(t)\dot{\xi}^2(t)\tilde{\varphi}^2(t)\,dt$.

(e) Verwenden Sie die Resultate, um im Catenoid–Problem (erneut) zu zeigen, daß die (tieferhängende) Lösung r_+ kein schwaches Minimum sein kann.

In der nächsten Aufgabe werden wir erstmals zeigen können, daß die (höherhängende) Lösung r_- (zumindest) ein schwaches Minimum ist. (In Wahrheit ist sie sogar ein starkes Minimum.)