TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
Priv.Doz. Dr. Jochen Denzler

Übungen zur Variationsrechnung — Blatt 8

Sommersemester 2000

AUSGABE AM FR., 14.7.2000
BESPRECHUNG: AB FR., 21.7.2000

28. Das Sturmsche Vergleichsprinzip und Catenoid Teil 4

Das Sturmsche Vergleichsprinzip funktioniert für skalare *lineare* Differentialgleichungen zweiter Ordnung (gelegentlich auch für Differentialungleichungen). Seien φ und ψ Lösungen derselben (oder zweier sehr ähnlicher) Differentialgleichungen. Man betrachtet die Wronskische $W := \varphi'\psi - \varphi\psi'$, leitet Information über W' her und benutzt diese, um über die relative Lage der Nullstellen von φ und ψ eine Aussage zu machen.

Wenden Sie das Prinzip konkret an, um zu zeigen: Falls φ eine Lösung der Differentialgleichung $u''(y) - (\tanh y)\, u'(y) + u(y) = 0$ ist mit den Randbedingungen $\varphi(y_-) = \varphi(y_+) = 0$, $\varphi > 0$ in $]y_-, y_+[$, und ψ eine Lösung derselben Gleichung mit $\psi(y_0) = 0$ für ein $y_0 \in\,]y_-, y_+[$, dann hat ψ im Intervall $[y_-, y_+]$ keine weitere Nullstelle, es sei denn $\psi \equiv 0$. Folgern Sie, daß im Catenoidproblem die flache Kurve r_- ein (zumindest) schwaches Minimum ist.

29. Scharen von Extremalen:

Unter den Grundvoraussetzungen von Blatt 7 sei $y(t,b)$ eine Schar von Extremalen, dh. $y \in C^1$ in beiden Variablen, und für jedes b ist $y(\cdot, b)$ eine Lösung der Euler-Gleichung. Es werden keine Annahmen über Randbedingungen $y(t_{0/1}, b)$ gemacht. Wir unterscheiden $\dot y := \partial y/\partial t$ und $y' := \partial y/\partial b$. Ferner verwenden wir die offensichtliche Notation

$$I_{t_0}^{t_1}[y(\cdot,b)] := \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t,b), \dot y(t,b))\, dt\ .$$

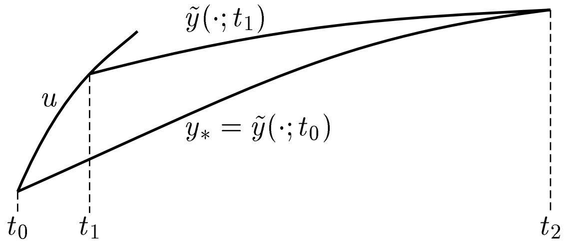
Man zeige:

$$\frac{\partial}{\partial b} I_{t_0}^{t_1}[y(\cdot,b)] = \big[L_{\dot y}(t, y(t,b), \dot y(t,b)) y'(t,b)\big]_{t_0}^{t_1}$$

30. Starke Minimale und die Weierstraßsche $\mathfrak{E}$-Funktion:

Um (z.B. notwendige) Bedingungen für ein starkes Minimum zu bekommen, reichen „schwache“ Variationen des Typs $y_* \to y_* + \varepsilon\varphi$ nicht aus. Wir müssen Vergleichskurven heranziehen, die für $\varepsilon \to 0$ auf eine solche Weise gegen die Kandidatenfunktion y_* konvergieren, daß zumindest in einem Punkt die Ableitungen der Vergleichsfunktionen *nicht* gegen die Ableitung der Kandidatenfunktion konvergieren.

Hierzu sei folgende Variation $\hat{y}$ des Segments y_* auf dem Intervall $[t_0, t_2]$ betrachtet: Für irgendein Kurvenstück u mit $u(t_0) = y_*(t_0)$ sei $\hat{y} = u$ auf $[t_0, t_1]$, und $\hat{y} = \tilde{y}(\cdot; t_1)$ auf $[t_1, t_2]$. Dabei sei $\tilde{y}$ diejenige Lösung der Eulergleichung, die $\tilde{y}(t_1; t_1) = u(t_1)$ und $\tilde{y}(t_2; t_1) = y_*(t_2)$ erfüllt. Wir lassen $t_1 \to t_0$ streben.



Die Frage der Konstruktion eines solchen Segments $\tilde{y}$ lassen wir einmal beiseite. Sie gelingt infolge der Legendre-Bedingung $L_{\dot{y}\dot{y}} > 0$, vorausgesetzt, t_2 sei hinreichend nahe bei t_0 gewählt.

Offenbar ist, wenn y_* stark minimal über dem Intervall $[t_0, t_2]$ ist,

$$\frac{d}{dt_1}\Big(I_{t_0}^{t_1}[u] + I_{t_1}^{t_2}[\tilde{y}(\cdot; t_1)]\Big) \geq 0 \; .$$

(a) Erklären Sie, warum nicht sogar „ $= 0$“ gilt, wie bei den früher betrachteten „schwachen“ Variationen.

(b) Folgern Sie aus dieser Beziehung als notwendige Bedingung für starke Minimalität (auf kurzen Segmenten um t_0) die Weierstraß-Bedingung

$$\begin{aligned} &\mathfrak{E}(t_0, y_*(t_0), \dot{y}_*(t_0), \dot{Y}) \geq 0 \quad \forall \dot{Y} \in \mathbb{R}^n \qquad \text{mit} \\ &\mathfrak{E}(t, y, \dot{y}, \dot{Y}) := L(t, y, \dot{Y}) - L(t, y, \dot{y}) - L_{\dot{y}}(t, y, \dot{y})(\dot{Y} - \dot{y}) \end{aligned}$$

$\mathfrak{E}$ heißt die Weierstraß'sche Exzeß– (oder kurz $\mathfrak{E}$–)Funktion.