Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Priv.Doz. Dr. Jochen Denzler

Zur Vorlesung Variationsrechnung

Sommersemester 2000

Notwendige und hinreichende Bedingungen in der Variationsrechnung

Vergleiche hierzu das Blatt von Anfang des Semesters mit demselben Diagramm wie umseitig.

Wir nehmen an:

$$I[y] := \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), \dot{y}(t))\, dt \text{ mit } L \in C^3$$

und betrachten folgende Bedingungen und Gleichungen:

Eulergleichung: $\frac{d}{dt} L_{\dot{y}_i}\Big(t, y_*(t), \dot{y}_*(t)\Big) = L_{y_i}\Big(t, y_*(t), \dot{y}_*(t)\Big)$

Jacobigleichung: $\sum_j \frac{d}{dt}\Big(L^*_{\dot{y}_i\dot{y}_j}(t)\dot{\varphi}_j + L^*_{\dot{y}_i y_j}(t)\varphi_j\Big) = \sum_j L^*_{y_i\dot{y}_j}(t)\dot{\varphi}_j + L^*_{y_i y_j}(t)\varphi_j$

Weierstraßsche Exzeßfunktion: $\mathfrak{E}(t, y, \dot{y}, \dot{Y}) := L(t, y, \dot{Y}) - L(t, y, \dot{y}) - L_{\dot{y}}(t, y, \dot{y})(\dot{Y} - \dot{y})$

(Einfache) Legendrebedingung: Die Matrix $L^*_{\dot{y}_i\dot{y}_j}(t)$ ist positiv semidefinit für alle $t \in [t_0, t_1]$

Strenge Legendrebedingung: Die Matrix $L^*_{\dot{y}_i\dot{y}_j}(t)$ ist positiv definit für alle $t \in [t_0, t_1]$

(Einfache) Weierstraßbedingung: $\mathfrak{E}(t, y_*(t), \dot{y}_*(t), \dot{Y}) \geq 0$ für alle $t \in [t_0, t_1]$ und alle $\dot{Y}$.

(Dies impliziert die einfache Legendrebedingung. Umgekehrt impliziert die „geschwindigkeitsglobalisierte" Legendrebedingung "$L_{\dot{y}\dot{y}}(t, y_*(t), \dot{Y})$ positiv semidefinit für alle $t \in [t_0, t_1]$ und alle $\dot{Y}$" die Gültigkeit der Weierstraßbedingung.)

Strenge Weierstraßbedingung: $\mathfrak{E}(t, y, \dot{y}, \dot{Y}) \geq 0$ für alle $t \in [t_0, t_1]$, für alle $(y, \dot{y})$ mit $|y - y_*(t)| < \varepsilon$, $|\dot{y} - \dot{y}_*(t)| < \varepsilon$ und alle $\dot{Y}$, und zusätzlich die strenge Legendrebedingung.

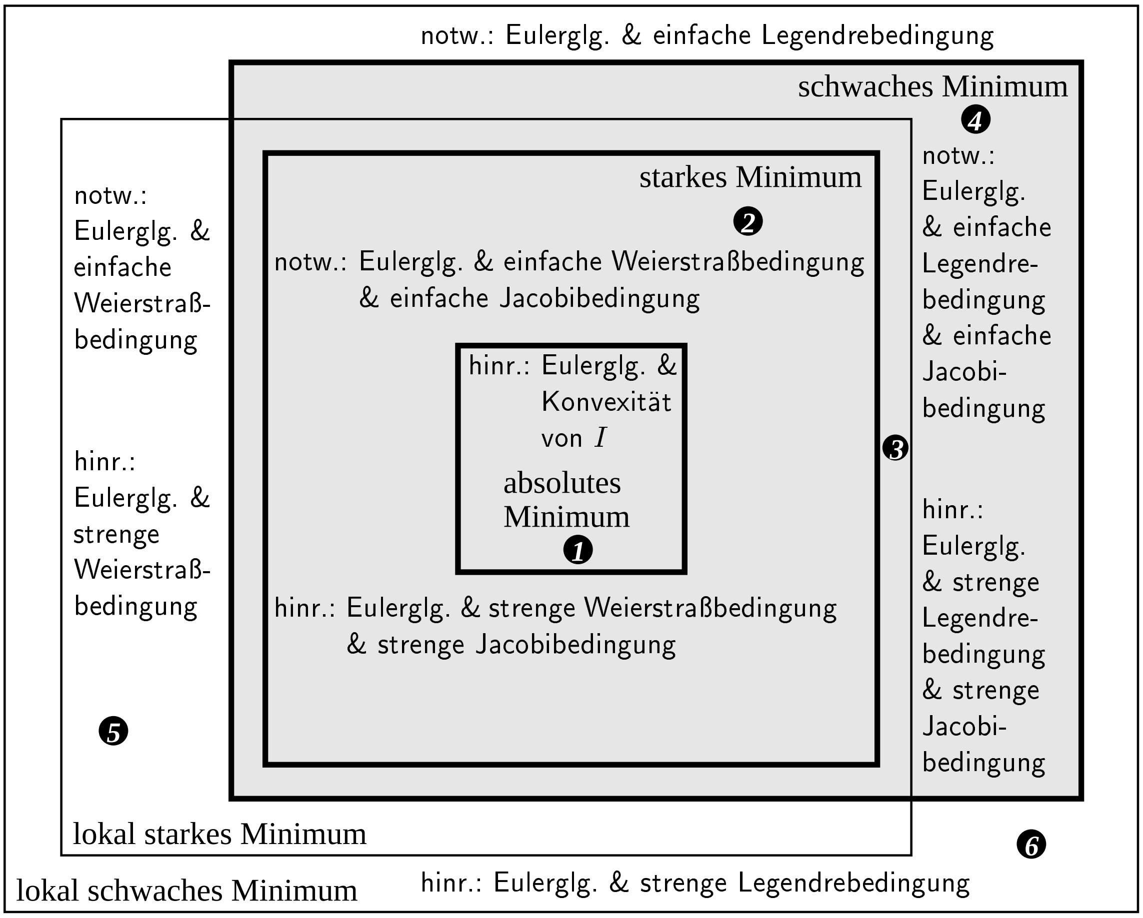
Wir definieren die folgenden Jacobibedingungen als leere Bedingungen, wenn die strenge Legendrebedingung verletzt ist. Wenn sie hingegen gilt, dann sei definiert:

(Einfache) Jacobibedingung: Jede nichttriviale Lösung φ der Jacobigleichung mit $\varphi(t_0) = 0$ hat keine weitere Nullstelle für $t \in]t_0, t_1[$.

Strenge Jacobibedingung: Jede nichttriviale Lösung φ der Jacobigleichung mit $\varphi(t_0) = 0$ hat keine weitere Nullstelle für $t \in]t_0, t_1]$.

Bemerkungen: Oft spricht man eher von schwacher und starker statt einfacher und strenger NN-Bedingung. Ich weiche hier davon ab, weil es ja mit schwachen und starken Minimalen nichts zu tun hat. Bei der Weierstraßbedingung wäre noch eine strenge Variante "$\mathfrak{E} > 0$ außer für $\dot{y} = \dot{Y}$" statt $\mathfrak{E} \geq 0$ zu betrachten, die aber *Eindeutigkeit* starker Minimaler charakterisiert und nicht die Unterscheidung zwischen notwendig und hinreichend betrifft. Konventionen betreffend die Reihenfolge des 3. und 4. Arguments von $\mathfrak{E}$ sind nicht einheitlich in der Literatur.

Notwendige und hinreichende Bedingungen finden sich im Diagramm umseitig:



Es gilt also folgendes Unterscheidungsschema für Extremale (Lösungen der Eulergleichung:

für notwendige Bedingungen: einfache NN-Bedingung	für hinreichende Bedingungen: strenge NN-Bedingung
für lokal-xxes Minimum nichts extra	für global-xxes Minimum Jacobibedingung
für schwaches Minimum Legendrebedingung	für starkes Minimum Weierstraßbedingung

Ferner erlaubt die Konstruktion von Extremalenfeldern ($n > 1$: Mayerfeldern), die unter Annahme der strengen Jacobibedingung in einer Umgebung einer Extremalen möglich ist, automatisch eine quantitative Abschätzung des Bereichs, innnerhalb dessen ein relatives Minimum tatsächlich (schwach oder stark) minimal ist. Sollte es also möglich sein, ein Mayerfeld so zu konstruieren, daß es ganz $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$ überdeckt und die strenge Legendrebedingung in ganz $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ gelten, dann ist jedes Segment des Mayerfeldes ein absolutes Minimum bezüglich „seiner“ Randbedingungen.

Zwischen den notwendigen und hinreichenden Bedingungen bleibt eine ziemlich enge Lücke; daher ist es nicht leicht, ein Beispiel des Typs $\int L(t, x, \dot{x})$ für den Bereich ❸ zu konstruieren (vielleicht überhaupt unmöglich?), und so war seinerzeit für diesen Bereich ein viel allgemeineres Funktional angegeben.