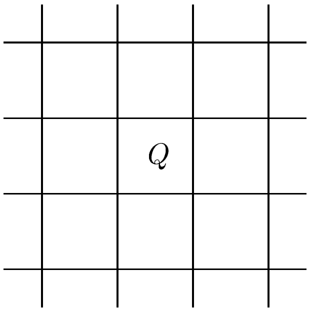
Über Flächen und Überlagerungen



In der euklidischen Ebene sei ein Quadrat Q gegeben, dazu die nebenstehende Parkettierung der Ebene mit kongruenten Quadraten. Man löse die folgenden Aufgaben, die eine andere Situation beschreiben, und finde zu allen dort gemachten Aussagen und allen dort auftretenden mathematischen Objekten auch das Analogon im hier genannten Beispiel.

Das in Aufgabe 14 beschriebene Modell $\mathbb{H}$ (obere Halbebene) der hyperbolischen Ebene, versehen mit der dort angegebenen Riemannschen Metrik, läßt sich durch die Abbildung $\tau \mapsto w = \frac{\tau - i}{\tau + i}$ in die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ biholomorph abbilden, und die Metrik in $\mathbb{D}$ wird dadurch festgelegt, daß diese Abbildung zu einer Isometrie erklärt wird. Geodäten sind also die (euklidischen) Kreise und Geraden, die senkrecht auf $\partial\mathbb{D}$ stehen. Die Winkelmessung in $\mathbb{D}$ ist euklidisch. Im Sinne dieses Modells der hyperbolischen Ebene versteht sich das unten gezeichnete Bild.

Wir konstruieren im folgenden eine spezielle Untergruppe $\mathcal{G}$ von $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, der Gruppe der orientierungstreuen Isometrien von $\mathbb{D}$, zugleich der Gruppe der biholomorphen Abbildungen $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$.

In $\mathbb{D}$ sei ein reguläres Achteck $\mathcal{F}$ mit Winkeln jeweils $\pi/4$ gegeben, dessen Ecken $w_1, \ldots, w_8$ heißen mögen. (Wer sich an den Satz von Gauß–Bonnet erinnert, möge ohne lange Rechnung sofort die Fläche von $\mathcal{F}$ angeben: vgl. das Resultat von Aufgabe 14e.)

Die Elemente $A, B, C, D \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ sind durch folgende Angaben eindeutig festgelegt:

$$\begin{aligned} A &: w_2 \mapsto w_1\,,\ w_3 \mapsto w_8 \\ B &: w_2 \mapsto w_7\,,\ w_1 \mapsto w_8 \\ C &: w_6 \mapsto w_5\,,\ w_7 \mapsto w_4 \\ D &: w_5 \mapsto w_4\,,\ w_6 \mapsto w_3 \end{aligned}$$

Die Skizze zeigt ein scheinbar „großes“ Achteck $\mathcal{F}$ in der „Mitte“ und acht dazu kongruente (!) angrenzende Achtecke. Man identifiziere, welche dieser Achtecke $A\mathcal{F}, \ldots D^{-1}\mathcal{F}$ sind. Man zeige, daß die Abbildung $C^{-1}DCD^{-1}A^{-1}BAB^{-1}$ zwei Fixpunkte hat (nämlich z.B. w_7, w_8) und daher die Identität ist. Man identifiziere auch einige der übrigen an den Ecken $w_1, \ldots, w_8$ anliegenden Achtecke.

Es ist übrigens völlig in Ordnung, wenn an dieser Stelle obskur bleibt, ob bzw. was die A, B, C, D mit den a, b, c, d in der Zeichnung zu tun haben. — Geduld!

Sei $\mathcal{G}$ die von A, B, C, D erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Wir behaupten, daß $\left\{ g\mathcal{F} \;\middle|\; g \in \mathcal{G} \right\}$ eine Parkettierung von $\mathbb{D}$ ist, d.h. daß

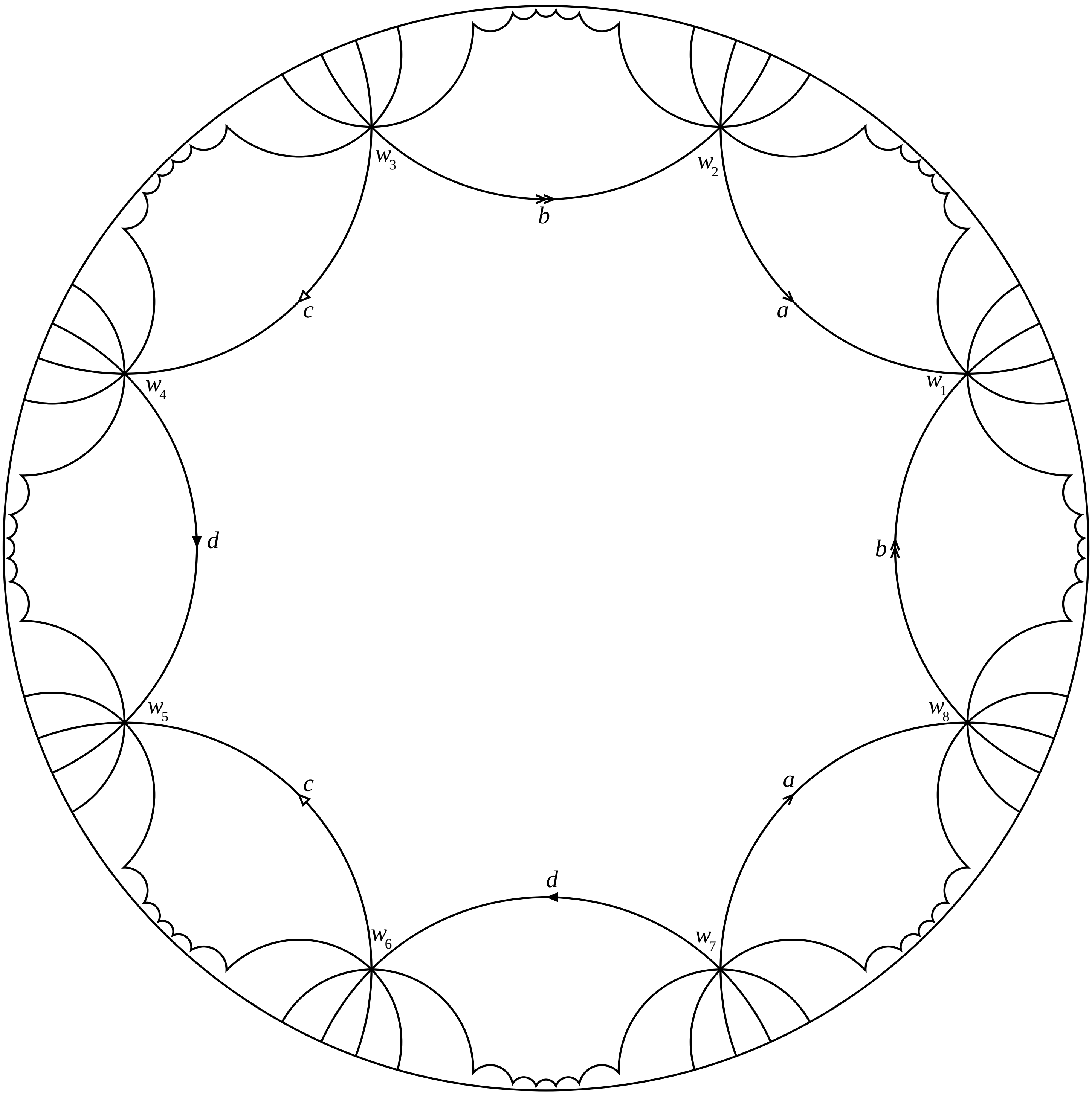
- $\bigcup_{g \in \mathcal{G}} g\mathcal{F} = \mathbb{D}$,
- $g_1\mathcal{F} = g_2\mathcal{F} \Longrightarrow g_1 = g_2$,
- $g_1\mathring{\mathcal{F}} \cap g_2\mathring{\mathcal{F}} = \emptyset$, falls $g_1 \neq g_2$.

Zum Beweis mache man sich folgendes klar:

- Es *gibt* eine Parkettierung von $\mathbb{D}$ mit zu $\mathcal{F}$ kongruenten Achtecken $\mathcal{F}_j$, von denen je 8 an einer Ecke zusammentreffen und von der die in der Skizze bereits eingezeichneten Achtecke ein Teil sind.

– Jedes $g\mathcal{F}$ ist ein Achteck dieser Parkettierung, und alle Achtecke kommen unter den $g\mathcal{F}$ vor.

– Um zu sehen, daß $g\mathcal{F} = \mathcal{F} \Rightarrow g = id$, zeige man zuerst, daß sich die im Bild angebrachten Pfeil–Markierungen der Randsegmente von $\mathcal{F}$ unter der Operation von $\mathcal{G}$ konsistent auf die ganze Parkettierung fortsetzen lassen.



Man folgere, daß sich die Menge $\mathcal{G}\backslash\mathbb{D}$ der Orbits (s. Nachtrag für die Definition eines Orbits) als topologischer Raum mit dem aus $\mathcal{F}$ durch passende Verklebung von Kantenpaaren entstehenden topologischen Raum identifizieren läßt.

NB:
$\mathcal{G}\backslash\mathbb{D}$ ist eine Quotientenmenge, $\backslash$ bedeutet also nicht „ohne“. Da wir gx und nicht xg schreiben, schreiben wir auch $\mathcal{G}\backslash\mathbb{D}$ und nicht $\mathbb{D}/\mathcal{G}$.

Wie sieht $M_2 := \mathcal{G}\backslash\mathbb{D}$ aus? (Skizze einer in $\mathbb{R}^3$ differenzierbar (nicht isometrisch) eingebetteten Mannigfaltigkeit.) Wir haben die Quotientenabbildung $p : \mathbb{D} \to \mathcal{G}\backslash\mathbb{D}$, die jedem $z \in \mathbb{D}$ seinen Orbit $\mathcal{G}z$ zuordnet, den wir als Punkt der Mannigfaltigkeit M_2 interpretieren.

Wir sagen: $p : \mathbb{D} \to \mathcal{G}\backslash\mathbb{D} =: M_2$ ist die universelle Überlagerung von M_2:

- Überlagerung, weil (das ist die Definition dieses Begriffs) für alle $x \in M_2$ eine Umgebung U existiert, so daß folgende Situation vorliegt:

$$\begin{tikzcd} gz \in p^{-1}(U) \arrow[dr, "p"'] & \cong & \mathcal{G} \times U \ni (g,z) \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\ & U & \end{tikzcd} \qquad \mathrm{pr}_2 : (g,z) \mapsto z$$

- universelle Überlagerung, weil $\mathbb{D}$ einfach zusammenhängend ist (eine mögliche unter äquivalenten Definitionen, die bequem für uns ist, auch wenn sie den Namen nicht erklärt.)

- die, weil es tatsächlich nur eine u.Ü. einer gegebenen Mannigfaltigkeit gibt (bis auf Isomorphie).

Nach Konstruktion ist $\mathcal{G}$ die Gruppe derjenigen differenzierbaren Selbstabbildungen g von $\mathbb{D}$, die die folgende Eigenschaft haben: der jeweilige Bildpunkt gz eines jeden Punktes z liegt „über“ demselben Punkt von M_2, dh. $pgz = pz$ bzw. $p \circ g = p$. Eine Abbildung $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, die $p \circ f = p$ erfüllt, heißt *Decktransformation* der Überlagerung $p : \mathbb{D} \to M_2$.

NB:
Nicht alle Überlagerungen lassen sich wie in dieser Übung als Quotienten einer Mannigfaltigkeit modulo einer Gruppe darstellen, aber alle, die in diesem Seminar eine Rolle spielen. Ferner ist, was hier (und bei den Topologen) Überlagerung heißt, das, was in der Funktionentheorie eine unbegrenzte unverzweigte Überlagerung heißt.

Nachtrag:

Diese Beispiele stehen für eine allgemeiner verwendetes System von Begriffen, und hier dürfte diese größere Allgemeinheit zur Klarheit beitragen: Sei $\tilde{M}$ eine Menge (topologischer Raum, differenzierbare Mannigfaltigkeit, Riemannsche Mannigfaltigkeit,...), dann betrachtet man dazu $\mathrm{Aut}(\tilde{M})$, die Gruppe der bijektiven Abbildungen (Homöomorphismen, Diffeomorphismen, Isometrien,...) von $\tilde{M}$ auf sich. Sei G eine Gruppe. Wenn man einen Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{Aut}(\tilde{M})$ hat, sagt man, G *operiert* (von links) auf $\tilde{M}$, und man schreibt gerne gm für $\rho(g)(m)$, wenn klar ist, welches ρ gemeint ist. Die Elemente der Gruppe G sind also nicht mehr abstrakt, sondern stehen ganz konkret für (die Struktur von $\tilde{M}$ erhaltende) Selbstabbildungen von $\tilde{M}$.

In unseren Beispielen wird ρ stets injektiv sein, aber in der allgemeinen Definition des Operierens einer Gruppe ist das nicht vorausgesetzt.

Faustregel: Alle Gruppen, die irgendwo außerhalb von solchen Vorlesungen, deren Zweck das Studium von Gruppen an sich ist, auftauchen, operieren dort auf irgendeiner Menge (topologischer Raum, differenzierbare Mannigfaltigkeit, Riemannsche Mannigfaltigkeit,...), und oft gilt das auch innerhalb jener Vorlesungen. Eine Gruppe, die nirgendwo operiert, ist der Kadaver einer Gruppe.

Man überzeuge sich, daß die Homomorphismuseigenschaft von ρ nichts anderes als das „gemischte Assoziativgesetz“ $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ ist, und das das anders wäre, wenn man xg statt gx schreiben würde. Hat man stattdessen aber einen *Anti*homomorphismus ρ, d.h. $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_2)\rho(g_1)$, dann hat man bei Operation von *rechts* das gemischte Assoziativgesetz.

Wenn G auf M operiert, heißt $\{gx \mid g \in G\}$ die Bahn oder der Orbit von x (unter G), und die Zerlegung von M in Bahnen ist eine Äquivalenzrelation (klar oder Übung).

Universelle Überlagerung und Fundamentalgruppe im Beispiel

Wir haben die Gruppe $\mathcal{G}$ zunächst als Gruppe von Abbildungen $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ konstruiert; als solche wird sie von den Transformationen A, B, C, D erzeugt, die der Relation $C^{-1}DCD^{-1}A^{-1}BAB^{-1}$ genügen. Also ist sie eine Quotientengruppe der abstrakten Gruppe

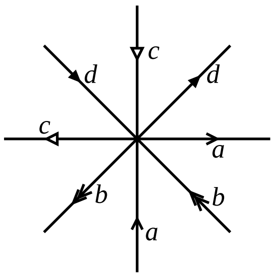
$$\langle A, B, C, D | C^{-1}DCD^{-1}A^{-1}BAB^{-1} \rangle \tag{1}$$

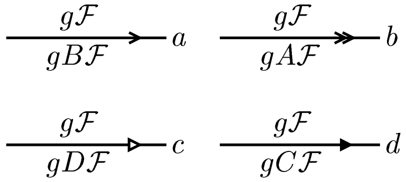
Wir werden gleich sehen, daß $\mathcal{G}$ genau diese Gruppe ist, daß also keine weiteren Relationen existieren.

Auf der Fläche M_2 bilden die geodätischen Segmente a, b, c, d, die im Bild eingezeichnet sind, geschlossene Kurven; diese repräsentieren Elemente von $\pi_1(M_2, w)$. Die Aufgabe vom Ende des Blattes über Fundamentalgruppen hat gezeigt, daß

$$\pi_1(M_2, w) = \langle a, b, c, d | aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \rangle \tag{2}$$

Die geometrische Situation in einer Umgebung von $w \in M_2$ bzw. einer Umgebung von jedem $gw_i \in \mathbb{D}$ ist wie im linken Bild; die Parkettierung von $\mathbb{D}$ hängt mit den Kurven a, b, c, d wie im rechten Bild angegeben zusammen:





Folgende Zuordnung vermittelt einen Isomorphismus zwischen den Gruppen $\mathcal{G}$ aus (1) und $\pi_1(M_2, w)$ aus (2):

$$\begin{array}{ll} a \longleftrightarrow A & A \longleftrightarrow a \\ b \longleftrightarrow B^{-1} & B \longleftrightarrow b^{-1} \\ c \longleftrightarrow B^{-1}ACBA^{-1} & C \longleftrightarrow a^{-1}b^{-1}cab \\ d \longleftrightarrow AB^{-1}D^{-1}A^{-1}B & D \longleftrightarrow a^{-1}b^{-1}d^{-1}ab \end{array} \tag{3}$$

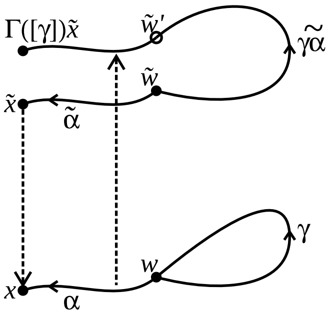
Aber dieser Isomorphismus ist nicht der einzig mögliche. Hier ist ein anderes Beispiel:

$$\begin{array}{ll} a \longleftrightarrow D^{-1}CADC^{-1} & A \longleftrightarrow c^{-1}d^{-1}acd \\ b \longleftrightarrow CD^{-1}B^{-1}C^{-1}D & B \longleftrightarrow c^{-1}d^{-1}b^{-1}cd \\ c \longleftrightarrow C & C \longleftrightarrow c \\ d \longleftrightarrow D^{-1} & D \longleftrightarrow d^{-1} \end{array} \tag{4}$$

Übung: Man prüfe in einem der Fälle, daß tatsächlich ein Isomorphismus vorliegt.

Die Isomorphie zwischen der Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkei M und der Decktransformationsgruppe ihrer universellen Überlagerung $p : \tilde{M} \to M$ gilt immer und ist Spezialfall eines viel allgemeineren Zusammenhangs (zwischen Untergruppen der Fundamentalgruppe und Decktransformationen irgendwelcher Überlagerungen von M): z.B. Stöcker/Zieschang Satz 6.5.5 und Folgerungen 6.5.6, 6.5.9.

Ein Isomorphismus $\Gamma : \pi_1(M, w) \to \mathrm{Deck}(p\colon \tilde{M} \to M)$ wird, abhängig von der Wahl eines Basispunkts $\tilde{w} \in \tilde{M}$ über dem Basispunkt $w \in M$ wie folgt definiert: Der geschlossene Weg γ repräsentiere ein Element $[\gamma] \in \pi_1(M, w)$. Darüber liegt genau ein[1] Weg $\tilde{\gamma}$ in $\tilde{M}$ (dh. $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$) mit Anfangspunkt $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{w}$. Sein Endpunkt $\tilde{\gamma}(1)$ sei $\tilde{w}'$. Dann ist $\Gamma([\gamma]) \in \mathrm{Deck}(p\colon \tilde{M} \to M)$ diejenige Decktransformation, die $\tilde{w} = \tilde{\gamma}(0)$ auf $\tilde{w}' = \tilde{\gamma}(1)$ abbildet. Dazu ist zu zeigen, daß es genau eine solche Decktransformation gibt und daß Γ ein Gruppenisomorphismus ist.



Um $\Gamma([\gamma])\tilde{x}$ zu bestimmen, wählt man einen Weg $\tilde{\alpha}$ von $\tilde{w}$ nach $\tilde{x}$. Darunter liegt der Weg $\alpha := p \circ \tilde{\alpha}$. Der Endpunkt $\widetilde{\gamma\alpha}(1)$ des Wegs $\widetilde{\gamma\alpha}$, der in $\tilde{w}$ beginnt und über $\gamma\alpha$ liegt, ist $\Gamma([\gamma])\tilde{x}$.

In unserem Beispiel entspricht der Isomorphismus (3) der Wahl $\tilde{w} = w_1$ in der Figur, während (4) zu $\tilde{w} = w_5$ gehört.

Literatur

Jedwede verdauliche unter den Einführungen in die algebraische Topologie, insbesondere Kapitel 5,6 von:

R. Stöcker, H. Zieschang: Algebraische Topologie, Teubner 1988

[1] ein anschaulich plausibles, grundlegendes Lemma, das wir beweisen müßten (was wir aber nicht tun)