Über die Fundamentalgruppe

Zur Definition der Fundamentalgruppe

In der Topolgie kann man lernen, daß sich jedem wegzusammenhängenden topologischen Raum X mit vorgewähltem Basispunkt $\bullet \in X$ eine Gruppe zuordnen läßt, die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X, \bullet)$.

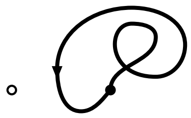
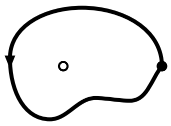
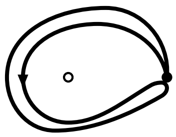
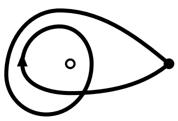
Dazu betrachtet man alle Wege γ in X, die in $\bullet$ beginnen und enden und betrachtet solche Wege γ_1, γ_2, die durch Homotopie (stetige Deformation bei Festhalten von Anfangs– und Endpunkt in $\bullet$) auseinander hervorgehen, als äquivalent. Die Äquivalenzklassen $[\gamma]$ sind die Elemente von $\pi_1(x, \bullet)$, die Gruppenverknüpfung entspricht dem Nacheinander–Durchlaufen von Wegen:

$$[\beta][\gamma] := [\text{erst } \beta, \text{ dann } \gamma \text{ durchlaufen}]$$

Der konstante Weg (in $\bullet$ stehenbleiben) ergibt das Neutralelement, das Inverse entspricht dem in umgekehrter Richtung durchlaufenen Weg.

Beispiele

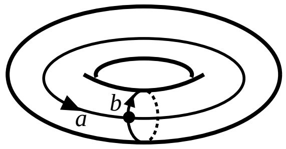
$(X, \bullet) = (\mathbb{C}, 0)$	alle Wege lassen sich auf den Punkt 0 zusammenziehen, also $\pi_1(\mathbb{C}, 0) \cong \{1\}$
$(X, \bullet) = (S^2, N)$ (Sphäre mit Nordpol)	ebenso : $\pi_1(S^2, N) \cong \{1\}$
$(X, \bullet) = (\mathbb{C}^*, 1)$ $(\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\})$	Zwei Wege sind genau dann homotop, wenn sie gleich oft das „Loch“ 0 umlaufen, wobei Umläufe in verschiedener Richtung mit verschiedenen Vorzeichen gezählt werden.
oder statt $\mathbb{C}^*$ auch: $\{r < \|z\| < 1/r\}$	Die Homotopieklassen der gezeichneten Wege werden dabei in folgende Elemente von $\mathbb{Z}$ abgebildet:

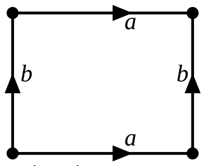
	entweder:	oder ebensogut:
	$\mapsto 0$	$\mapsto 0$
	$\mapsto 1$	$\mapsto -1$
	$\mapsto 1 - 1 = 0$	$\mapsto -1 + 1 = 0$
	$\mapsto -2$	$\mapsto 2$

$\pi_1(\mathbb{C}^*, \bullet) \cong \mathbb{Z}$.
Weil die Zuordnung der konkreten Elemente $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{C}^*, \bullet)$ zu den Elementen der abstrakten Gruppe $\mathbb{Z}$ oft eine Willkür enthält (so wie hier die Orientierung), ist es eine gute Idee, $\pi_1(\mathbb{C}^*, \bullet) \cong \mathbb{Z}$ und nicht $\pi_1(\mathbb{C}^*, \bullet) = \mathbb{Z}$ zu schreiben.

$X = S^1$ ganz analog: $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$

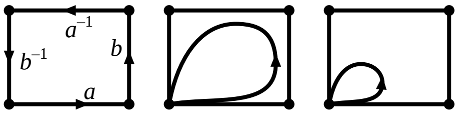
T^2: Torus





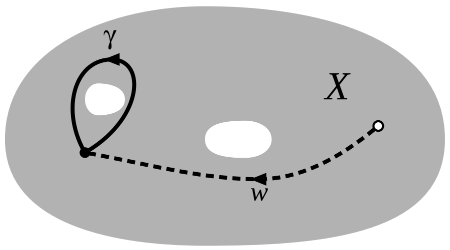
Wir trauen unseren Augen und lassen die Topologen beweisen, daß sich a und b nicht stetig ineinander deformieren lassen, also verschiedene Elemente in $\pi_1(T^2, \bullet)$ repräsentieren.

stetige Deformation von $aba^{-1}b^{-1}$:



also gilt $[a][b] = [b][a]$ in $\pi_1(T^2, \bullet)$.

Wir trauen unseren Augen verdächtig oft und schließen unter zu Recht stirnrunzelnder Zustimmung der Topologen, daß es keine weiteren „Löcher" gibt als die, um die a und b laufen und deshalb $\pi_1(T^2, \bullet)$ von $[a]$, $[b]$ erzeugt wird; daß die Verhältnisse bei mehrmaligem Umlaufen dieser Löcher so sind wie oben bei S^1, also daß alle $[a]^n$ verschieden sind. Mit der Zuordnung (z.B.) $[b]^m[a]^n = [a]^n[b]^m \longleftrightarrow \binom{n}{m}$, hat man $\pi_1(T^2, \bullet) \cong \mathbb{Z}^2$.



$$\begin{array}{rcl} \pi_1(X, \bullet) & \to & \pi_1(X, \circ) \\ [\gamma] & \mapsto & [w\gamma w^{-1}] \end{array}$$

Bei Wechsel des Basispunkts (in wegzusammenhängenden Räumen) erhält man isomorphe Fundamentalgruppen, aber es wäre von Übel, sie identifizieren zu wollen, weil der Isomorphismus sehr wohl von der Wahl eines Wegs w von $\circ$ nach $\bullet$ abhängt.

$$\pi_1(X, \bullet) \cong \pi_1(X, \circ)$$
ABER
$$\pi_1(X, \bullet) \neq \pi_1(X, \circ)$$

Freies Produkt

Neben den aus den Grundvorlesungen bekannten Operationen mit Gruppen brauchen wir das sog. freie Produkt $G_1 * G_2$ von Gruppen G_1, G_2: Die Menge $G_1 \vee G_2$ entsteht durch disjunkte Vereinigung der Mengen G_1, G_2, wobei dann aber die Neutralelemente $e_i \in G_i$ in $G_1 \vee G_2$ zu einem Element e identifiziert werden. Die Gruppe $G_1 * G_2$ besteht als Menge aus den „Wörtern" $a_1 \dots a_n$ $(n \geq 0)$ mit „Buchstaben" $a_j \in G_1 \vee G_2$.

Die Verknüpfung zweier Wörter $a = a_1 \dots a_n$ und $b = b_1 \dots b_m$ in $G_1 * G_2$ ist das Aneinanderhängen: $ab := a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$. Dabei wird, wann immer zwei benachbarte Buchstaben eines Wortes aus der selben Gruppe stammen, das Produkt in dieser Gruppe ausgewertet. Das leere Wort (0 Buchstaben) ist mit dem Neutralelement $e \in G_1 * G_2$ zu identifizieren. Die Gruppen G_i sind als die Mengen der einbuchstabigen Wörter in $G_1 * G_2$ eingebettet.

Auch für topologische Räume mit Basispunkt $(X, \bullet)$ und $(Y, \circ)$ läßt sich in einer gewissen Analogie das sog. Bouquet $(X \vee Y, \diamond)$ definieren: $X \vee Y$ entsteht durch disjunkte Vereinigung von X und Y und anschließende Identifikation von $\bullet$ und $\circ$ zu *einem* Basispunkt $\diamond$. Teilmengen von $X \vee Y$ sind definitionsgemäß genau dann offen, wenn ihre Urbilder unter den natürlichen Einbettungen $X \hookrightarrow X \vee Y$ und $Y \hookrightarrow X \vee Y$ offen sind.

Aufgabe: In der obigen Beschreibung von $G_1 * G_2$ versuche man, möglichst jeden mathematischen Begriff, jeden Konstruktionsschritt, jede Aussage analog in einem Bild des Bouquets $X \vee Y$ von Räumen X, Y und Wegen darin wiederzufinden.

Endlich präsentierte Gruppen

Sei a ein Symbol. Die von a erzeugte freie Gruppe ist definiert als die Menge der Symbole $\{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \ldots\}$ mit der offensichtlich beabsichtigten Verknüpfung $a^n a^m := a^{n+m}$. Diese Gruppe wird als $\langle a|\rangle$ geschrieben und ist offenbar isomorph zu $\mathbb{Z}$.

Die von verschiedenen Symbolen $a_1, \ldots, a_k$ erzeugte freie Gruppe $\langle a_1, \ldots, a_k|\rangle$ ist das freie Produkt $\langle a_1|\rangle * \ldots * \langle a_k|\rangle$.

Das Rechnen in einer freien Gruppe ist denkbar einfach: z.B:

$$(acd^2)(d^{-1}c^2b) = acdc^2b\ ; \quad (a^3b^2cd)^{-1} = d^{-1}c^{-1}b^{-2}a^{-3}$$

Was sich nicht offensichtlich vereinfachen läßt, läßt sich gar nicht vereinfachen, und was nicht offensichtlich gleich ist, ist tatsächlich verschieden.

Sei $G = \langle a_1, \ldots, a_k|\rangle$ eine freie Gruppe und seien $r_1, \ldots, r_l \in G$. Die Gruppe $\langle a_1, \ldots, a_k | r_1 = \ldots = r_l = 1\rangle$, oft abgekürzt als $\langle a_1, \ldots, a_k | r_1, \ldots, r_l\rangle$, ist definiert als die Quotientengruppe von G modulo dem von $r_1, \ldots, r_l$ erzeugten Normalteiler. Letzterer besteht genau aus den Elementen $\prod_j g_j R_j g_j^{-1}$ mit $g_j \in G$ und $R_j \in \{r_1, \ldots, r_l\}$, und genau diese sind in der Quotientengruppe als 1 (Neutralelement) zu interpretieren. Die a_i heißen die Erzeugenden, die r_j Relationen. Das Drauflosrechnen in einer solchen Gruppe ist noch immer denkbar einfach: Man rechnet wie in der freien Gruppe, darf aber zusätzlich die Gleichungen $r_j = 1$ verwenden. Zum Beispiel in $\langle x, y | xyx(yxy)^{-1} = 1\rangle$:

$$x^3yx^3 = x^2(xyx)x^2 = x^2yxyx^2 = x(xyx)yx^2 = xyxy^2x^2 = yxy^3x^2$$

Zielstrebiges Rechnen kann aber verdammt schwierig sein, wenn man z.B. entscheiden will, ob zwei verschieden aussehende Gruppenelemente gleich sind oder nicht. (Dafür gibt es beweisbar keinen Algorithmus.)

Fundamentalgruppe als Funktor

Das Bilden der Fundamentalgruppe ist ein sog. „Funktor“, d.h. eine Art Übersetzungsmaschine von einem Gebiet der Mathematik in ein anderes. Im vorliegenden Fall leistet die Übersetzungsmaschine folgendes:

---

wegzush. top. Raum mit Basispunkt
$(X, \bullet)$

$\Rightarrow$

Fundamentalgruppe
$\pi_1(X, \bullet)$

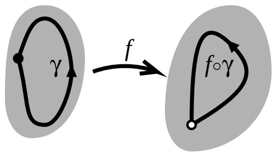
---

stetige Abbildung zwischen solchen Räumen
$(X, \bullet)$ und $(Y, \circ)$
$f : X \to Y \,,\ \bullet \mapsto \circ$

$\Rightarrow$

Gruppenhomomorphismus

$f_* : \pi_1(X, \bullet) \to \pi_1(Y, \circ)$



$\Rightarrow$

$[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$

Zusammensetzung solcher Abbildungen

$$\begin{tikzcd} (X,\bullet) \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & (Z,\diamond) \\ & (Y,\circ) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$
$$[\mathrm{id}_{(X,\bullet)}]_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,\bullet)}$$

Zusammensetzung solcher Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,\bullet) \arrow[rr, "g_* \circ f_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & & \pi_1(Z,\diamond) \\ & \pi_1(Y,\circ) \arrow[ur, "g_*"'] & \end{tikzcd}$$

Injektivität und Surjektivität sind bei der Übersetzung im allg. verletzt, aber bijektive Abbildungen übersetzen sich in bijektive. Man folgere das aus dem bisher Gesagten und konstruiere auch Gegenbeispiele als Beleg für die behauptete Verletzung der Surjektivität und Injektivität.

Produkt punktierter Räume
$(X, \bullet) \times (Y, \circ) := (X \times Y, (\bullet, \circ))$

$\Rightarrow$

Produkt ihrer Fundamentalgruppen
$\pi_1(X, \bullet) \times \pi_1(Y, \circ)$

$$\pi_1(X \times Y, (\bullet, \circ)) = \pi_1(X, \bullet) \times \pi_1(Y, \circ)$$

„Summe“* (Bouquet) punktierter Räume
$(X \vee Y, \diamond)$

$\Rightarrow$

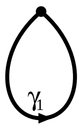
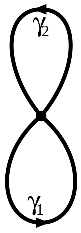
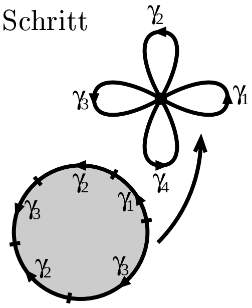
„Summe“* (freies Produkt) ihrer Fundamentalgruppen
$\pi_1(X, \bullet) * \pi_1(Y, \circ)$

$$\pi_1(X \vee Y, \diamond) = \pi_1(X, \bullet) * \pi_1(Y, \circ)$$
mit der im Text erklärten Notation

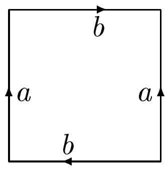
---

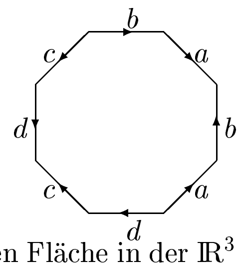
* Die Bezeichnung Summe wäre aus systematischen Gründen, die wir hier nicht diskutieren, angemessen. Traditionell üblich sind aber die in Klammern angegebenen Begriffe Bouquet bzw. freies Produkt

Wann immer man einen topologischen Raum wie im folgenden in der linken Spalte beschrieben sukzessive aufbauen kann (und das geht bei allen endlichdimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeiten), kann man seine Fundamentalgruppe nach folgenden Regeln berechnen:

		Raum	Fundamentalgruppe
1. Schritt	•	ein Punkt (Basispunkt)	$\langle \vert \rangle$ (triv. Gruppe)
2. Schritt		eine Strecke wird mit beiden Endpunkten (und nur diesen) am Basispunkt angeheftet	$\langle c_1 \vert \rangle \cong \mathbb{Z}$
3. Schritt		noch eine Strecke wird mit beiden Endpunkten (und nur diesen) am Basispunkt angeheftet	$\langle c_1, c_2 \vert \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$
	⋮	(endlich viele Strecken)	
4. Schritt		Eine Kreisfläche (oder ein homöomorphes Bild davon) wird mit dem Rand (mit dem ganzen Rand und nur diesem) an die vorhandenen Strecken so angeheftet, daß beim Durchlaufen des Rands ganze Strecken in einer gewissen Weise durchlaufen werden, z.B. möge der Rand den Weg $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_3^{-1}$ durchlaufen und eine vierte Strecke γ_4, die auch noch angeheftet sei, gar nicht.	Der Rand wird zu einer Relation; im Bsp. ist die FG: $\langle c_1, c_2, c_3, c_4 \vert c_1c_2c_3c_2^{-1}c_3^{-1} \rangle$
	⋮	(endlich viele Kreisscheiben)	(weitere Relationen)
5. Schritt		nach Dimension geordnet sukzessive k–dimensionale ($k = 3, 4, \ldots$) Kugeln, jeweils mit dem ganzen Rand (und nur diesem) an das bereits Vorhandene anheften.	keine Änderung der Fundamentalgruppe mehr.

Übung: Man berechne nach diesem Verfahren die Fundamentalgruppe des Torus (ein Punkt zwei Strecken, ein Quadrat) und diejenige der Sphäre (ein Punkt, keine Strecke, eine Kreisscheibe; oder ein Punkt, eine Strecke, zwei Kreisscheiben). Man berechne weiter die Fundamentalgruppe der Flächen, die aus den folgenden Vielecken durch Identifizieren der Seiten in der angegebenen Weise entsteht:





Man skizziere eine stetige Einbettung der zweiten Fläche in der $\mathbb{R}^3$ samt der Lage der Kurven. (Das ist nicht ganz einfach zu skizzieren; man gehe beim Verheften sukzessive vor; so wie die Winkel des Achtecks gegeben sind, wird man keine differenzierbare Einbettung erhalten, sondern nur Lipschitz.)