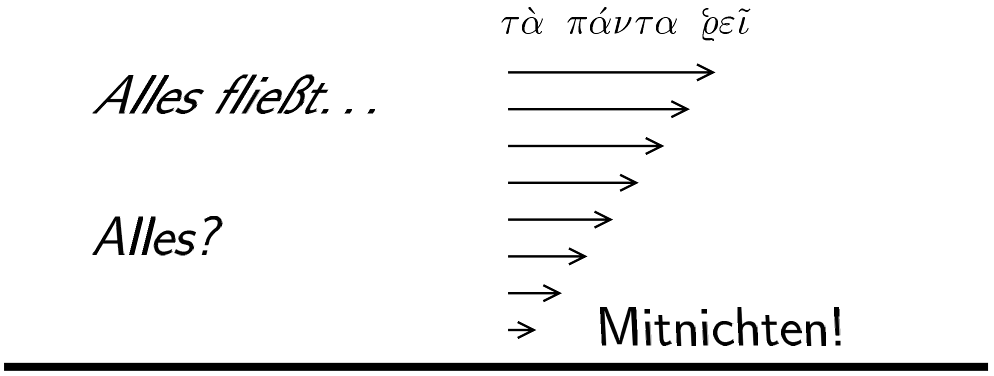
Jochen Denzler

A Study of the Spectral Theory of the Orr–Sommerfeld Equation for Plane Couette Flow

Eine Abhandlung, vorgelegt mit dem Ziele der Habilitation für das Fach Mathematik an der Technischen Universität München, im September 1999



Dank Zähigkeit verliert eine dünne Schicht von Flüssigkeitsteilchen nicht die Bodenhaftung

Gewidmet dem Andenken meines Vaters,
Armin Denzler,
Landwirt und Kraftfahrer,
23.05.35 – 03.07.91.

Acknowledgements:

First of all, it is a pleasure for me to acknowledge the continuing support by Prof. Scheurle, who not only opened a new and challenging subject to me, but whose encouragement and advice has helped me a lot to carry on. This work has profited from Margit Rösler, whose comments helped me to make the introduction more readable (the blame for all remaining insufficiencies rests with the author of course), and Rita Meyer-Spasche, who pointed out interesting literature to me. Moreover, I owe interesting discussions to Prof. Spohn and Prof. Kirchgässner, and my colleagues Andreas Johann, Hans–Peter Kruse, and Dierk Schleicher.

Contents

List of Figures

Kapitel 0

Zusammenfassung und Einführung

Die Strömung einer zähen Flüssigkeit wird durch die Navier–Stokes–Gleichungen beschrieben. In Fällen einfacher Geometrie pflegen diese Gleichungen zeitunabhängige (stationäre) Lösungen zu haben, sogenannt laminare Strömungen, und es treten keine Turbulenzen auf. Beobachtet werden diese Strömungen in der Praxis aber nur, wenn sie stabil gegenüber den unvermeidlichen Störungen wie Rauhigkeit der Gefäßwände oder äußere Erschütterungen sind. Hierfür gilt in der Theorie der dynamischen Systeme die Regel, daß eine Lösung einer (nichtlinearen) Differentialgleichung dann asymptotisch stabil ist, wenn das Spektrum (häufig Eigenwerte) des in der linearisierten Gleichung $\partial_t u = Au$ auftretenden Operators A in der linken Halbebene liegt. Diese Regel ist ein Theorem für gewöhnliche Differentialgleichungen, bedarf aber weiterer Voraussetzungen, um auch für partielle Differentialgleichungen zu gelten. Typischerweise ist die nötige Zusatzvoraussetzung, daß das Spektrum sogar in einem Sektor mit Öffnungswinkel $< \pi$ in der linken Halbebene liegt.

Die Gleichungen der Hydrodynamik unterliegen einem Skalenverhalten, bei welchem eine Kombination aus einer typischen Längenabmessung, einer typischen Strömungsgeschwindigkeit und der Viskosität der Flüssigkeit eine dimensionslose Zahl ergibt, die Reynoldszahl. Diese ist nach physikalischer Erfahrung charakteristisch für das qualitative Strömungsverhalten, wobei bei niedrigen Reynoldszahlen laminare Strömungen auftreten, bei hohen Reynoldszahlen hingegen turbulente.

Als konkretes Beispiel entscheidet das (verallgemeinerte) Eigenwertproblem der Orr–Sommerfeld–Gleichung

$$\begin{aligned}&\left[\Big(\varepsilon(\partial_y^2-\alpha^2) - i\alpha U(y) - \lambda\Big)(\partial_y^2-\alpha^2) + i\alpha U''(y)\right] w(y) = 0\ ,\\ &w(0) = 0 = w(1)\ , \quad w'(0) = 0 = w'(1)\ ,\\ &\alpha : \text{Wellenzahl}\ ,\ \ \varepsilon^{-1} : \text{Reynoldszahl}\ ,\ \ \lambda : \text{Spektralparameter}\end{aligned} \tag{OS}$$

über die dynamische Stabilität der Grundströmung $\boldsymbol{u}(x,y,z) = U(y)\boldsymbol{e}_x$ einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit zwischen zwei unendlich ausgedehnten, parallelen Platten. Der Fall $U(y) = y(1-y)$ entspricht dabei einer (durch einen Druckgradienten erzwungenen) Strömung zwischen festen Platten, während der Fall $U(y) = y$,

$$\Big(\varepsilon(\partial_y^2-\alpha^2) - i\alpha y - \lambda\Big)(\partial_y^2-\alpha^2) w(y) = 0 \tag{OSebC}$$

einer Scherströmung zwischen Platten entspricht, die sich mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegen. Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist ausschließlich der Fall der Scherströmung, das sogenannte ebene Couette–Problem. Dessen Stabilität für beliebige Reynoldszahlen wurde bereits 1973 durch Romanov mathematisch streng nachgewiesen.

In der Einleitung gebe ich eine Ausarbeitung von Romanovs Stabilitätsbeweis, in der insbesondere die (scheinbare) Diskrepanz zwischen dem (rein linearisiert definierten) Stabilitätsbegriff der hydrodynamischen Literatur einerseits und dem in der Theorie dynamischer Systeme üblichen

Begriff der asymptotischen Stabilität des vollen (nichtlinearen) Systems andererseits, der hiervon durch die Zusatzvoraussetzung der Sektorbedingung getrennt ist, überbrückt wird. (Diese Überbrückung ist implizit bei Romanov vorhanden, wird dort aber nicht besonders thematisiert.)

Mit dem Beweis, daß im Falle der OS–Gleichung für die ebene Couette–Strömung alle Eigenwerte in der linken Halbebene liegen, und zwar für jede Reynoldszahl, und dem nachfolgenden Beweis, daß dies im gegebenen Falle in der Tat asymptotische Stabilität impliziert, ist die Fragestellung aber nicht zu einem befriedigenden Abschluß gelangt. Selbstverständlich sagt die asymptotische Stabilität einer Lösung noch nicht viel über deren praktische Stabilität aus, denn der Einzugsbereich der stabilen Lösung kann so extrem klein sein, daß in allen praktischen Fällen auch die kleinsten realistischen Störungen die Lösung sehr leicht aus diesem Einzugsbereich heraustreiben. (Unter dem Einzugsbereich ist dabei die Gesamtheit der Anfangszustände zu verstehen, die im Laufe der Zeit in einer geeigneten Topologie gegen die stabile Lösung konvergieren.) Darauf, daß dieses Phänomen durch zeitlich transiente Vergrößerung von Anfangsstörungen besonders verstärkt werden kann, wurde in jüngster Zeit (z.B. durch Trefethen [28]) hingewiesen. Mechanismus dieses transienten Verhaltens ist die Nicht–Normalität des linearisierten Navier–Stokes–Operators. (Nicht–)Normalität versteht sich hier bzgl. des physikalisch sinnvollen Skalarprodukts auf einem relevanten Funktionenraum.

Praktische Instabilität wird im ebenen Couette–Problem für hohe Reynoldszahlen (ab etwa 350) tatsächlich beobachtet. Die mathematische Natur der dabei beobachteten (turbulenten oder „sogenannte turbulenten“) Lösungen harrt eines tieferen Verständnisses. Hierbei mag die Interpretation numerischer und experimenteller Ergebnisse ein mathematisches Verständnis wohl voranbringen, vielleicht aber auch in gewissem Umfange zur Voraussetzung haben, da ja die unvermeidbare Diskrepanz zwischen den endlichen Experimenten und dem Modell unendlich ausgedehnter Platten nur durch interpretierende Beurteilung überbrückt werden kann. Der Versuch, solche mathematischen Erklärungsansätze zu entwickeln, mag an sich schon ein schwieriges Unterfangen sein, er trifft aber schon im Anfangsstadium auf die Schwierigkeit, daß das Spektrum der OS–Gleichung in seiner Gesamtheit, jenseits der Frage, ob es in der linken Halbebene liege, nicht vollständig verstanden ist, verstandene Teile hingegen in einer unüberschaubaren Literatur verstreut sind, in der Begriffe wie „bekannt“, „wohlbekannt“, „wohl bekannt“ oder „bewiesen“ je nach Fachrichtung unterschiedliche Bedeutungen annehmen.

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist es, das Spektrum der OS–Gleichung in seiner Gesamtheit geometrisch zu beschreiben und die Resultate weitestmöglich mathematisch streng zu beweisen. Dabei spielen insbesondere die Airy–Funktionen Ai und Bi, welche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung $w''(z) = zw(z)$ sind, oder Linearkombinationen davon eine Rolle, denn es kommt (unvermeidlicherweise) die charakteristische Gleichung

$$\Delta(\delta,t,\varepsilon) := \begin{vmatrix} \int_{-1}^{1} \mathrm{Ai}(\delta+itz)\sinh(4\varepsilon t^3 z)\,dz & \int_{-1}^{1} \mathrm{Ai}(\delta+itz)\cosh(4\varepsilon t^3 z)\,dz \\ \int_{-1}^{1} \mathrm{Bi}(\delta+itz)\sinh(4\varepsilon t^3 z)\,dz & \int_{-1}^{1} \mathrm{Bi}(\delta+itz)\cosh(4\varepsilon t^3 z)\,dz \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(CharEq)}$$

zum Einsatz, die dem Spektralproblem vermöge

$$2t = (\alpha/\varepsilon)^{1/3}\ , \quad \lambda = -\varepsilon(4it^3 + 4t^2\delta) - (8\varepsilon t^3)^2$$

äquivalent ist und von der (im Sinne des Prinzips von der Erhaltung der Schwierigkeit) Synge 1938 schreibt:

> The deduction of general results from [this equation] is well-nigh impossible.

(Zitiert nach Drazin/Reid [5], S. 214). (Die hier eingeführte Variable t hat nichts mit der Zeit zu tun.) Die in Frage kommenden Methoden sind problembedingt weitgehend vorgegeben: Abgrenzung von Gebieten im Parameterraum, Satz von Rouché oder verwandte topologische Methoden und Behandlung verschiedener Grenzfälle durch asymptotische Entwicklungen der Airy–Funktionen. Üblicherweise interpretiert man das Spektralproblem in dem Sinne, daß periodische

Randbedingungen in den Richtungen unendlicher Ausdehnung der Platten gestellt werden, so daß nach Fourieranlayse der Wellenzahlparameter α in (OS) diskrete Werte annimmt, abhängig vom (willkürlichen) Periodizitätsgitter. In der charakteristischen Gleichung (CharEq) hingegen ist es natürlich, die Wellenzahl als kontinuierlichen Parameter zu betrachten (und kein Gitter auszuzeichnen). Die Information für den Fall diskreter Werte der Wellenzahl gewinnt man durch Spezialisierung von α leicht zurück.

In Kapitel 1 erläutere ich die Genese der Orr–Sommerfeld–Gleichung aus den Navier–Stokes–Gleichungen. Einen Überblick über die wichtigsten Resultate zur OS–Gleichung gebe ich in Kapitel 2. Für spätere Verwendung stelle ich in Kapitel 3 die wesentlichen Eigenschaften der Airy–Funktionen zusammen, soweit sie ganz unabhängig von der OS–Gleichung von Interesse sind. Speziellere Eigenschaften der Airy–Funktionen gebe ich mit Beweisen in Abschnitt 5.2.1 an.

Als Fundament der Analyse von (CharEq) kann man den Grenzfall kleiner Wellenzahlen sehen, in dem als Lösungen nur reelle δ vorkommen können und das Verhalten für alle Reynoldszahlen (einschließlich geeignet interpretierter Grenzfälle 0 und ∞) qualitativ gleich ist. Dieser Teil der Untersuchung ist Gegenstand von Kapitel 4, insbesondere Abschnitt 4.3 und wird weiter unten noch näher ausgeführt. Qualitativ gleich für alle Reynoldszahlen ist auch der Bereich großer Wellenzahlen (die Asymptotik $t \to \infty$ bei beschränktem $\operatorname{Re}\delta$). Hier treten komplexe Lösungsäste auf (d.h., δ ist komplex), deren asymptotisches Verhalten einfachen Bedingungen genügt. Quantitativ zeigt sich die Singularität beider Limiten ($\varepsilon \to 0$ und $\varepsilon \to \infty$) in Sprungunstetigkeiten des asymptotischen Verhaltens:

<table>
<tr><th>Grenzfall</th><th>$\varepsilon = 0$</th><th>$0 < \varepsilon < \infty$</th><th>$\varepsilon = \infty$</th></tr>
<tr><td>reeller Ast:
$t \to 0,\ \delta \to \infty$
$x := \lim_{t\to 0} \delta^{1/2} t$
erfüllt:</td><td colspan="2">$\sin x\,(x \cos x - \sin x) = 0$</td><td>$\sin x \cos x = 0$</td></tr>
<tr><td>komplexer Ast:
$t \to \infty,\ \operatorname{Im}\delta > 0$
$y := e^{-2\pi i/3} \lim_{t\to\infty} (\delta - it)$
erfüllt:</td><td>$\int_y^\infty \operatorname{Ai}(z)\,dz = 0$</td><td colspan="2">$\operatorname{Ai}(y) = 0$</td></tr>
</table>

Wie die von $t = \infty$ kommenden komplexen und die von $t = 0$ kommenden reellen Äste zusammenhängen, entscheidet sich ausschließlich in einem kritischen Bereich, der innerhalb der durch die Bedingung $|t - \sqrt{3}\delta| < const$ gegebenen Menge liegt. Dies liegt daran, daß die erwähnten Äste von anderen Ästen durch a–priori–Schranken für Lösungen abgetrennt werden, welche in den Parameterraum „Wände“ einziehen, die das Lösungskontinuum nicht durchdringen kann. Soweit diese Wände einzelne Äste isolieren, kann von diesen kein anderer Ast abzweigen. und zwar deshalb, weil die Anzahl der Lösungen δ von $\Delta(\delta, t, \varepsilon) = 0$ in beschränkten Gebieten als Funktion von t konstant ist, solange keine Lösungen durch den Rand eindringen oder verschwinden. Die analytische Abhängigkeit von den Parametern geht hier entscheidend ein. Der Umstand, daß t nur reeller Werte fähig ist, zeichnet t gegenüber δ als Parameter für die Äste aus, und die Analytizität erlaubt es, auf dem Lösungskontinuum beliebig in Richtung wachsender oder fallender Werte von t voranzuschreiten: Wenn der Satz über implizite Funktionen dies wegen Verletzung seiner Voraussetzungen nicht mehr garantiert, tritt als eine (analytische) Verallgemeinerung der Weierstraßsche Vorbereitungssatz an seine Stelle und garantiert die Fortsetzung des Lösungskontinuums jenseits des kritischen Punktes auf einem abzweigenden Ast. Auf diese Weise ist <u>jede</u> Lösung von (CharEq) topologisch mit den (vergleichsweise) leicht zu klassifizierenden reellen Lösungen im Bereich $t < O(|\delta|^{1/4})$ verbunden.

Diese Prinzipien, nämlich das Verfolgen von Lösungsästen bis in den kritischen Bereich, wobei diese von anderen Ästen durch Wände getrennt sind, ist sowohl für den Fall $\varepsilon > 0$ (Abschnitt 5.3) als auch für den Fall $\varepsilon = 0$ (Kapitel 6) ein entscheidendes Hilfsmittel.

Die Analyse im kritischen Bereich $|t - \sqrt{3}\delta| < const$ ist naturgemäß die schwierigste, da sie alle auftretenden Verzweigungen des Lösungskontinuums, abhängig von der Reynoldszahl ε^{-1} erklären muß. Sie wird mit asymptotischen Methoden durchgeführt, was den Nachteil hat, daß die Beschreibung zunächst nur bis auf eventuell endlich viele Ausnahmeäste (d.h. außerhalb eines Kompaktums) gilt. Numerisch scheinen diese Ausnahmen gar nicht aufzutreten, und es sollte möglich sein, durch geeignete Intervallarithmetik und mit quantitativen Restgliedabschätzungen der asymptotischen Reihen dies streng zu zeigen. Ich habe einen solchen Versuch nicht unternommen und beschränke mich auf die asymptotische Analyse. (Siehe insbesondere Abschnitt 6.3.2.)

Analytisch erfreulich elegant läßt sich der Grenzfall $\varepsilon = \infty$ (Reynoldszahl 0) abhandeln, da er auf die Gleichung $\mathrm{Bi}(\delta + it)/\,\mathrm{Ai}(\delta + it) = \mathrm{Bi}(\delta - it)/\,\mathrm{Ai}(\delta - it)$ führt. Entscheidend dabei ist ein Studium der Niveaulinien der Funktion $z \mapsto |\mathrm{Bi}(z)/\,\mathrm{Ai}(z)|$, wobei die Kenntnis der Nullstellen von Ai und Bi wesentlich eingeht (Abschnitt 5.2 und Figur auf Seite 62). Störungstheoretisch ist von dort der Fall großer ε zugänglich. Genaugenommen ist nicht ε, sondern das Produkt $4\varepsilon t^3$, das ja in die Gleichung (CharEq) eingeht, entscheidend, also genau die Wellenzahl. Der formale Grenzwert $\varepsilon \to \infty$, der zunächst physikalisch wenig interessant erscheinen mag, erweist sich also zugleich für jedes feste $\varepsilon > 0$ physikalisch als Grenzwert großer Wellenzahlen. So liegt für jedes $\varepsilon > 0$ (d.h. jede endliche Reynoldszahl, wie groß auch immer) außerhalb eines (natürlich von ε abhängigen) Kompaktums eine Störung des Falles der Reynoldszahl 0 vor. Daher können sich Änderungen der Topologie des Lösungskontinuums in Abhängigkeit von der Reynoldszahl nur für $\varepsilon \to 0$ häufen. Dies ist die wesentliche Erkenntnis aus Abschnitt 5.3. Mit asymptotischen Methoden läßt sich nun der Fall $\varepsilon = 0$ untersuchen, und man stellt fest, daß gegenüber dem Falle großer ε in der Tat unendliche viele topologische Änderungen stattgefunden haben.

Das Studium des Falles $\varepsilon = 0$ ist Gegenstand von Kapitel 6. Im wesentlichen sind die Änderungen des Spektrums gegenüber dem Falle großer ε von der folgenden Art: Wenn man die reellen Lösungsäste nach ihrer natürlichen Anordnung und zugleich ihrem asymptotischen Verhalten (wie in der obigen Tabelle angegeben) durchnumeriert, so sind für große ε benachbarte Äste paarweise verbunden: 1 mit 2, 3 mit 4 usw. Für $\varepsilon = 0$ hingegen sind die Äste in Vierergruppen verbunden: 1 mit 4 und 2 mit 3, sodann 5 mit 8 und 6 mit 7, usw. Dies wurde schon von Gallagher [6] numerisch beobachtet und treffend als "mode crossing" bezeichnet; eine analytische Erklärung hat er nicht gegeben. Die führenden Terme der Asymptotik im kritischen Bereich finden sich bereits bei Reid [22]. Aber erst der Vergleich mit den Resultaten für große ε und die Erkenntnis, daß für jedes $\varepsilon > 0$ "mode crossing" höchstens endlich viele Moden betrifft, erklärt die Diskrepanz zwischen gelegentlich numerisch beobachtetem und gelegentlich nicht beobachtetem "mode crossing", die Reid [22] abschließend als einen noch etwas obskuren Punkt thematisiert.

Numerische Evidenz spricht dafür, daß beim Verkleinern von ε nur solche Bifurkationen des Spektrums auftauchen, die dann bis $\varepsilon = 0$ auch erhalten bleiben, daß also die Verzweigungsrichtung bzgl. ε stets eine einseitige ist und daher die Gesamtheit stattgefundener Verzweigungen im Grenzfalle $\varepsilon = 0$ bewahrt ist. Dies mathematisch streng zu zeigen (evtl. bis auf Kompakta) bleibt Ziel weiterführender Untersuchungen, die noch nicht Gegenstand der vorgelegten Schrift sind. Desgleichen die Untersuchung beweisbarer qualitativer Eigenschaften der zugehörigen Eigenfunktionen.

Zumindest für kleine Werte von (δ, t), etwa bis 10, und für $\varepsilon \lesssim 0.01$ bereitet die Untersuchung der charakteristischen Gleichung mit einem Verfahren steilsten Abstiegs keine numerischen Probleme. Eine ad–hoc Prädiktor–Korrektor–Strategie für die Schrittweite auf den zu berechnenden Lösungskurven, über deren Anfang nahe ∞ man aus der Asymptotik gut Bescheid weiß, erlaubt auch dem nicht numerisch spezialisierten Mathematiker die Berechnung von Eigenwerten mit Mathematica, auch durch Verzweigungspunkte hindurch. Für große (δ, t) machen die oszillierenden Integrale Schwierigkeiten, aber dort greift sowieso das Verständnis mit Hilfe asymptotischer Methoden.

Zwei Besonderheiten sind noch zu erwähnen:

Die Untersuchung des Verhaltens für kleine t und der Beweis, daß dort nur reelle Lösungen δ auftauchen, führt auf eine Reihendarstellung der charakteristischen Gleichung, deren erstes Glied allein relevant ist. Tatsächlich handelt es sich bei dieser Reihe um eine konvergente Reihe, die durch Umordnung der vollständigen Taylorentwicklung von (CharEq) in allen Parametern entsteht, wobei überraschenderweise die Neuzusammenfassung der Koeffizienten ziemlich explizit möglich ist. Diese Reihenumordnung involviert eine ganze Menge kombinatorischer Überlegungen, die in Kapitel 4 ausgeführt werden. Die Determinante in (CharEq) führt dabei auf höhere Wronskische $\mathrm{Ai}^{(n)}\,\mathrm{Bi}^{(m)} - \mathrm{Bi}^{(n)}\,\mathrm{Ai}^{(m)}$. Das Verhalten der Funktion Δ wird in diesem Bereiche wesentlich durch die neue Variable δt^2 bestimmt, deren Signifikanz aus (CharEq) selbst noch nicht zu erkennen ist. Die Reihendarstellung von Δ (Theorem 4.7) scheint, soweit ich sehe, in der Literatur völlig neu zu sein.

Zweitens ist, da alle involvierten Funktionen Lösungen linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen sind, auch der Ausdruck Δ Lösung gewisser linearer (partieller oder gewöhnlicher) Differentialgleichungen geeignet hoher Ordnung. Diese Gleichungen werden hergeleitet und zur Verfügung gestellt (Kapitel 7). Inwieweit sie nützlich sind, bleibt abzuwarten.

Von den beiden letztgenannten Nebenresultaten abgesehen sind die verwendeten Methoden geläufig, und auch die verschiedenen Grenzfälle wurden wiederholt betrachtet. Ich habe dafür jeweils (frühe) Referenzen angegeben, ohne den hoffnungslosen Versuch zu wagen, eine komplette Bibliographie zusammenzustellen. Nach meinem besten Wissen ist aber unter der Rahmenbedingung mathematischer Strenge eine ähnlich weitgehende Analyse des Spektrums in der Literatur nicht vorhanden. Überdies scheinen auch etablierte Resultate wie das von Romanov weniger bekannt zu sein, so daß eine auf das spezielle Problem (OSebC) fokussierte Synopse auch unter diesem Aspekt Nutzen verspricht.

Ein Verständnis der topologischen Struktur der Äste des Spektrums weckt Hoffnungen auf Kontinuitätsmethoden zur Untersuchung der Eigenfunktionen. Die Eigenwerte, die dem Grenzfall $t \to 0$, $\delta \to \infty$ auf den reellen Ästen entsprechen, sind nämlich selbst reell, und dort verhalten sich die Eigenfunktionen ähnlich wie bei Sturm-Liouville–Problemen. Hier bieten sich weitere Untersuchungen an.

Chapter 0

Abstract and Introduction

The flow of a viscous fluid is described by the Navier–Stokes equations. If the geometry is simple, these equations use to have time–independent (stationary) solutions, so called laminar flows, and turbulence does not occur. However these flows can be observed in reality only if they are stable with respect to the unavoidable perturbations like a coarse surface of the container or exogenic vibrations. In the theory of dynamical systems, there is the rule that a solution to a (nonlinear) differential equation is asymptotically stable, if the spectrum (often consisting of eigenvalues) of the operator A occurring in the linearized equation $\partial_t u = Au$ lies in the left half plane. This rule is a theorem in the case of ordinary differential equations, but needs additional assumptions in order to be valid for partial differential equations as well. Typically, the extra assumption needed is that the spectrum should even be contained in a sector whose vertex angle is $< \pi$ and which is contained in the left half plane.

The equations of hydrodynamics enjoy a scaling property: from a certain combination of a typical length scale, a typical flow velocity and the viscosity of the fluid, one may form a dimensionless number, the Reynolds number. According to the experience of physics, the Reynolds number characterizes the qualitative behaviour of the flow such that laminar flows occur for small Reynolds numbers, whereas turbulent ones occur for large Reynolds numbers.

As a concrete example, the (generalized) eigenvalue problem for the Orr–Sommerfeld equation

$$\begin{aligned}
&\Big[\Big(\varepsilon(\partial_y^2 - \alpha^2) - i\alpha U(y) - \lambda\Big)(\partial_y^2 - \alpha^2) + i\alpha U''(y)\Big]\, w(y) = 0\ , \\
&w(0) = 0 = w(1)\ , \quad w'(0) = 0 = w'(1)\ , \\
&\alpha : \text{wave number}\ , \quad \varepsilon^{-1} : \text{Reynolds number}\ , \quad \lambda : \text{spectral parameter}
\end{aligned} \tag{OS}$$

determines the dynamical stability of the laminar flow $\boldsymbol{u}(x, y, z) = U(y)\boldsymbol{e}_x$ of an incompressible viscous fluid between parallel plates that extend indefinitely. Here, the case $U(y) = y(1-y)$ corresponds to a flow between fixed plates (caused by a pressure gradient), whereas the case $U(y) = y$,

$$\Big(\varepsilon(\partial_y^2 - \alpha^2) - i\alpha y - \lambda\Big)(\partial_y^2 - \alpha^2)w(y) = 0 \tag{OSplC}$$

describes a shear flow between plates that are moving with respect to each other with constant velocity. The present work is concerned exclusively with the case of a shear flow, the so called plane Couette problem. The stability of this flow for arbitrary Reynolds numbers was proven by Romanov in full mathematical rigor as early as 1973.

In the introduction, I am offering an extended resume of Romanov's stability proof which bridges in particular the (apparent) discrepancy between the stability concept of hydrodynamics (which is <u>defined</u> by linearization) on one hand and the concept of asymptotic stability of the full nonlinear system, common in the theory of dynamical systems, on the other hand; this latter is separated from linearized stability by the extra assumption of sectoriality. (This gap is bridged implicitly in Romanov's work, although he does not particularly stress the point.)

However, the proof that all eigenvalues for the Orr–Sommerfeld equation of plane Couette flow lie in the left half plane, for any Reynolds number, plus the proof that for the case at hand, this implies indeed asymptotic stability, does not conclude the question in a satisfactory way. Clearly, asymptotic stability of a solution does not necessarily tell much about the practical stability of that solution, because the basin of attraction of the stable solution may be that tiny that in practice even the very smallest among realistic perturbations can easily drive the solution out of that basin of attraction. (The basin of attraction is defined as the set of all initial states that converge to the stable solution in an appropriate topology, as the time gets large.) Recently, e.g., Trefethen [28] has pointed out that this phenomenon can be reinforced by an amplification of initial perturbations that is transient in time. Non–normality of the linearized Navier–Stokes operator is a mechanism for this transient behaviour; here, (non–)normality is to be understood with respect to such a scalar product on a relevant function space as is natural from a physical point of view.

Practical instability at high Reynolds numbers (beginning at approximately 350) is actually observed in the plane Couette problem. A mathematical characterization of the observed solutions (turbulent or so called "turbulent") still lacks a deeper understanding. In that pursuit, the interpretation of numerical and experimental results may well foster a mathematical understanding, but may, on the other hand, also ground on such an understanding, given that the gap between finite experiments and the model of indefinitely extended plates can only be bridged by careful judgement and interpretation. Any attempt to develop rudiments of a mathematical explanation, difficult as the enterprise may anyway be, is hampered in its very beginning by the difficulty that the spectrum of the Orr–Sommerfeld equation as a whole, beyond the question whether it is confined to the left half plane, is not completely understood, whereas parts that are understood are scattered in a vast literature in which concepts like "known", "well-known", "seems to be known" or "proven" change their meaning dependent on which scientific community is involved.

The present work aims at a geometric description of the spectrum of the Orr–Sommerfeld equation as a whole, and at proving the results in full rigor, if at all possible. In particular, the Airy functions Ai and Bi or linear combinations thereof, in other words, the solutions of the ODE $w''(z) = zw(z)$, play a basic role, because one necessarily has to solve the characteristic equation

$$\Delta(\delta,t,\varepsilon) := \begin{vmatrix} \int_{-1}^{1} \mathrm{Ai}(\delta+itz)\sinh(4\varepsilon t^3 z)\,dz & \int_{-1}^{1} \mathrm{Ai}(\delta+itz)\cosh(4\varepsilon t^3 z)\,dz \\ \int_{-1}^{1} \mathrm{Bi}(\delta+itz)\sinh(4\varepsilon t^3 z)\,dz & \int_{-1}^{1} \mathrm{Bi}(\delta+itz)\cosh(4\varepsilon t^3 z)\,dz \end{vmatrix} = 0\,, \qquad \text{(CharEq)}$$

which is equivalent to the spectral problem through the relation

$$2t = (\alpha/\varepsilon)^{1/3}\,, \quad \lambda = -\varepsilon(4it^3 + 4t^2\delta) - (8\varepsilon t^3)^2$$

and about which Synge wrote in 1938:

> The deduction of general results from [this equation] is well-nigh impossible.

(Quotation following Drazin/Reid [5], p. 214). (The variable t introduced here has nothing to do with time.) The problem determines the methods available for its solution, namely delimiting domains in parameter space, using Rouché's theorem or related topological methods, and discussion of certain limiting cases by means of asymptotic expansions of the Airy functions. The spectral problem is commonly understood with respect to periodic boundary conditions in the directions of indefinite extension of the plate, and by Fourier analysis, this attributes discrete values to the wave number parameter, which are however dependent on the arbitrary lattice of periodicity. In the characteristic equation (CharEq) however, the wave number is used as a continuous parameter, and no lattice is selected. The information for the case of discrete values of the wave number can trivially be recovered by specialization.

In Chapter 1, I explain the genesis of the Orr–Sommerfeld equation from the Navier–Stokes equations. A review of some fundamental results concerning the OS equation is then given in Chapter 2. For the convenience of subsequent use, I collect those fundamental properties about the Airy functions in Chapter 3 which are of interest independent of the OS equation. More special properties of the Airy functions will be given and proved in Section 5.2.1.

The limiting case of small wave numbers may be seen as the foundation on which the analysis of (CharEq) rests. In this case, only real δ can occur as solutions, and the behaviour is qualitatively the same for all Reynolds numbers (including properly defined limiting cases of Reynolds numbers 0 and ∞). This part of the investigation is carried out in Chapter 4, in particular Section 4.3 and will be explained in more detail below. To have the same qualitative behaviour for all Reynolds numbers is also a feature of the limiting case of large wave numbers (more precisely, the asymptotics as $t \to \infty$ with $\operatorname{Re}\delta$ bounded). In this limit, there occur complex solution branches (i.e., δ is complex) whose asymptotic behaviour is governed by simple conditions. Quantitatively, however, the singularity of both limits ($\varepsilon \to 0$ and $\varepsilon \to \infty$) shows as a jump discontinuity of the asymptotic behaviour:

<table>
<tr><th>Limiting case</th><th>$\varepsilon = 0$</th><th>$0 < \varepsilon < \infty$</th><th>$\varepsilon = \infty$</th></tr>
<tr><td>real branch:
$t \to 0,\ \delta \to \infty$
$x := \lim_{t \to 0} \delta^{1/2} t$
satisfies:</td><td colspan="2">$\sin x\,(x \cos x - \sin x) = 0$</td><td>$\sin x \cos x = 0$</td></tr>
<tr><td>complex branch:
$t \to \infty,\ \operatorname{Im}\delta > 0$
$y := e^{-2\pi i/3} \lim_{t\to\infty} (\delta - it)$
satisfies:</td><td>$\int_y^\infty \operatorname{Ai}(z)\,dz = 0$</td><td colspan="2">$\operatorname{Ai}(y) = 0$</td></tr>
</table>

It is only a certain critical domain, contained in the set $|t - \sqrt{3}\delta| < const$, that determines how the complex branches coming from $t = \infty$ connect to the real branches coming from $t = 0$. The reason is that the branches are separated from other branches by a–priori bounds for solutions, so there are "walls" in the parameter space that cannot be crossed by the solution continuum. As long as these walls isolate single branches, no other branch can bifurcate from an isolated one, because the number of solutions δ to $\Delta(\delta, t, \varepsilon) = 0$ in bounded domains is constant as a function of t, as long as solutions cannot enter or leave through the boundary. The analytic dependence on all parameters is used here. The fact that t takes on only real values distinguishes t as a convenient parameter on the branches, and analyticity permits to follow the solution continuum indefinitely with ever decreasing or ever increasing values of t: As soon as this is no longer guaranteed by the implicit function theorem (because its hypotheses are violated), the Weierstraß preparation theorem is available as a generalization, and it guarantees that it is possible to continue the solution set beyond the critical point on a bifurcating branch. This way, every solution to (CharEq) is topologically connected with the real solutions in the domain $t < O(|\delta|^{1/4})$, which can be classified comparatively easily.

These basic tools, namely to follow the solution branches until they enter the critical domain, during which process the branches are separated from each other by walls, is a crucial ingredient both in the case $\varepsilon > 0$ (Section 5.3) and in the case $\varepsilon = 0$ (Chapter 6).

Obviously, the analysis within the critical domain $|t - \sqrt{3}\delta| < const$ is the most difficult, because it has to explain all bifurcations of the solution continuum that may occur as the Reynolds number ε^{-1} changes. This analysis is carried out by means of asymptotic methods, of which a disadvantage is that a–priori, the description is valid up to possibly finitely many exceptional branches (i.e. outside some compact set). Numerically, these exceptions do not appear to occur. It should be possible to prove this using interval arithmetics and quantitative bounds for the error terms. I have however not made such an attempt, but restrict the discussion to the asymptotic analysis. (See in particular Section 6.3.2.)

The limiting case $\varepsilon = \infty$ (Reynolds number 0) can be treated with elegance, because it leads to the equation $\mathrm{Bi}(\delta + it)/\,\mathrm{Ai}(\delta + it) = \mathrm{Bi}(\delta - it)/\,\mathrm{Ai}(\delta - it)$. It is a corollary to a study of the level lines of the function $z \mapsto |\mathrm{Bi}(z)/\,\mathrm{Ai}(z)|$, and a knowledge of the zeros of Ai and Bi is crucial here (Section 5.2 and the figure on page 62). The case of large ε is accessible from there by means of perturbation theoretic arguments. More precisely, it is not ε, but the product $4\varepsilon t^3$, namely the wave number, that plays a decisive role and also enters in (CharEq). The formal limit $\varepsilon \to \infty$, of little physical interest as it may seem at first glance, turns out to be, for every fixed $\varepsilon > 0$, the limit of large wave numbers. Therefore, for any $\varepsilon > 0$ (i.e., for any finite Reynolds number whatever large it may be), we have a perturbation of the the case of Reynolds number zero outside some compact set, which of course depends on ε. Hence changes in the topology of the solution continuum under changes of the Reynolds number can only accumulate at $\varepsilon = 0$. This is the key observation from Section 5.3. The case $\varepsilon = 0$ itself can be analyzed by means of asymptotic methods, and it turns out that indeed infinitely many changes in topology have taken place in comparison to the case of large ε.

A detailed study of the case $\varepsilon = 0$ is carried out in Chapter 6. Essentially, the changes of the spectrum as compared to the case of large ε are as follows: suppose that the real solution branches are numbered in their natural order, which is at the same time given by their asymptotic behaviour as specified in the table above. Then, for large ε, neighbouring branches are connected pairwise: 1 to 2, 3 to 4, etc. In contrast, for $\varepsilon = 0$, the branches are connected in groups of four: 1 to 4 and 2 to 3; next 5 to 8 and 6 to 7; etc. This observation has already been made by Gallagher [6] numerically, and quite appropriately he called it mode crossing; he did not give an analytic explanation. The leading terms of the asymptotic behaviour in the critical domain can already be found in Reid [22]. But it is only in comparison with the results for large ε and by understanding that for any $\varepsilon > 0$ only finitely many modes have crossed that the discrepancy between occasional observations and non-observations of mode crossing is lucidly explained. This discrepancy is addressed by Reid in the conclusion of his paper as a somewhat obscure point.

Numerical evidence suggests that only such bifurcations occur when decreasing ε that remain intact until $\varepsilon = 0$, in other words, that the direction of bifurcations is always the same and the totality of bifurcations that have taken place is preserved in the limiting case $\varepsilon = 0$. It will be an object of further pursuit to prove this rigorously (possibly up to compact sets), but this matter is not yet part of the present work. Similarly, research on provable qualitative properties of eigenfunctions is still pending.

At least for small values of (δ, t), up to approximately 10, and for $\varepsilon \lesssim 0.01$, the numerical study of the characteristic equation using the method of steepest descent presents no difficulties. An ad–hoc predictor corrector strategy for the stepwidth on the solution curves to be determined makes it possible also for the mathematician who is not specialized in numerical methods to calculate the eigenvalues with the help of Mathematica, crossing branch points included. The start of these curves near infinity is easily accessible asymptotic information. For large values of (δ, t), one has trouble with the oscillatory integrals, but this regime is anyway amenable to an understanding through asymptotic methods.

Two peculiarities deserve mentioning:

A study of the behaviour for small t and the proof that only real solutions δ occur in this case leads to a series expansion of the characteristic equation of which only the first term is relevant. As a matter of fact, this series is convergent, namely it arises from a complete Taylor expansion with respect to all parameters of (CharEq), and surprisingly the rearrangement of coefficients can be done rather explicitly. This rearrangement of the series involves a bunch of combinatorial arguments, which are detailed out in Chapter 4. The determinant involved in (CharEq) leads to higher Wronskians $\mathrm{Ai}^{(n)}\,\mathrm{Bi}^{(m)} - \mathrm{Bi}^{(n)}\,\mathrm{Ai}^{(m)}$. In the domain under discussion, the behaviour of the function Δ is characterized by the new variable δt^2 of which the significance cannot be recognized in (CharEq). To the best of my knowledge, the series representation of Δ given in Theorem 4.7 seems to be completely new in the literature.

Secondly, as all involved functions solve linear ordinary differential equations, the expression Δ itself also satisfies certain linear (partial or ordinary) differential equations of sufficiently high order. These equations are derived and made available (Chapter 7). Time will show how useful they can be.

Apart from these two spinoff results, the methods used are common, and the different limiting cases have been the object of repeated study. I have given (early) references, without venturing into a hopeless attempt to collect a complete bibliography. To the best of my knowledge, however, no similarly thorough analysis of the spectrum as a whole under the constraint of analytic rigor is available in the literature. Moreover, even established results like Romanov's appear to be less well-known, which makes a synopsis focused on that particular problem (OSplC) hopefully useful.

An understanding of the topological structure of the branches of the spectrum gives some hope that continuity methods may help in the investigation of the eigenfunctions. Those eigenvalues that correspond to the limiting case $t \to 0$, $\delta \to \infty$ on the real branches are real numbers themselves, and there, the eigenfunctions behave similarly as in the case of Sturm Liouville problems. Further research may issue from this point.